1. Методы проецирования начертательной геометрии

1.1. Предмет начертательной геометрии

Начертательная геометрия является одной из фундаментальных наук, составляющих основу инженерно-технического образования. Она изучает методы изображений пространственных геометрических фигур на плоскости и способы решения по этим изображениям метрических и позиционных задач в пространстве.

Начертательная геометрия используется также при конструировании сложных поверхностей технических форм в авиационной, судостроительной и других отраслях транспорта и промышленности.

Методы начертательной геометрии позволяют решать многие прикладные задачи специальных инженерных дисциплин (механики, химии, кристаллографии, картографии, инструментоведения и др.)

При проектировании и изображении различных транспортных конструкций и сооружений также широко используются методы начертательной геометрии.
Конструирование сложных форм поверхностей, автоматизированное проектирование и компьютерная графика находят все большее применение при создании современной транспортной техники.

Начертательная геометрия развивает у человека пространственное мышление, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записи геометрических предложений и решения задач в начертательной геометрии предлагается пользовать геометрический язык, составленный из следующих обозначений и символов.

Геометрическая фигура обозначается − Ф.

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита или арабскими цифрами:

A, B, C, D, …,L, M, N, …

1, 2, 3, 4, …, 12, 13, 14, …

Линии, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций, обозначаются строчными буквами латинского алфавита:

a, b, c, d, …,l, m, n, …

Линии уровня обозначаются: h − горизонталь; f − фронталь; p − профильная прямая;

Для прямых используются также следующие обозначения:

(AB) − прямая, проходящая через точки A и B;

[AB) − луч с началом в точке A;

[AB] − отрезок прямой, ограниченный точками A и B.

Поверхности обозначаются строчными буквами греческого алфавита:

α, β, γ, δ, …, ζ, η, λ, …

Чтобы подчеркнуть способ задания поверхности, следует указывать геометрические элементы, которыми она определяется, например:

$\alpha\ (a \parallel b)$ − плоскость α определяется параллельными прямыми a и b;

$\beta\ (d_1 d_2 g\ \alpha)$ − поверхность β определяется направляющими d_1 и d_2, образующей g и плоскостью параллелизма α.

Углы обозначаются:

$\angle$ ABC − угол с вершиной в точке B, а также $\angle\ \alpha^o, \angle\ \beta^o, \ldots, \angle\ \varphi^o$, ..,

Угловая величина (градусная мера) обозначается знаком, который ставится над углом:

φ^o − величина угла φ.

Прямой угол отмечается квадратом с точкой внутри.

Для плоскостей проекций приняты обозначения: π_1 π_2 π_3, где π_1 − горизонтальная плоскость проекций; π_2 − фронтальная плоскость проекций; π_3 − профильная плоскость проекций;

При замене плоскостей проекций или введении новых плоскостей проекций последние обозначаются π_4, π_5 и т.д.

Оси проекций обозначаются: x,y,z, где x − ось абсцисс; y− ось ординат; z − ось аппликат. Постоянную прямую эпюра Монжа обозначают k.

Проекции точек, линий поверхностей, любой геометрической фигуры обозначаются теми же буквами (или цифрами), что и оригинал, с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости проекций, на которой они получены:

$A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots, L_1, M_1, N_1, \ldots$ − горизонтальные проекции точек;

$A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots, L_2, M_2, N_2, \ldots$ − фронтальные проекции точек;

$A_3, B_3, C_3, D_3, \ldots, L_3, M_3, N_3, \ldots$− профильные проекции точек;

$a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, l_1, m_1, n_1, \ldots$ − горизонтальные проекции линий;

$a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, l_2, m_2, n_2, \ldots$ − фронтальные проекции линий;

$a_3, b_3, c_3, d_3, \ldots, l_3, m_3, n_3, \ldots$ − профильные проекции линий;

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots, \zeta_1, \eta_1, \lambda_1, \ldots$− горизонтальные проекции поверхностей;

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots, \zeta_2, \eta_2, \lambda_2, \ldots$− фронтальные проекции поверхностей;

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \ldots, \zeta_3, \eta_3, \lambda_3, \ldots$− профильные проекции поверхностей.

Следы прямых (линий) обозначаются прописными буквами, с которых начинаются слова, определяющие название (в латинской транскрипции) плоскости проекций, которую пересекает линия.

Например: H − горизонтальный след прямой (линии) a;

F − фронтальный след прямой (линии) a;

P − профильный след прямой (линии) a.

Следы плоскостей (поверхностей) обозначаются теми же буквами, что горизонталь и фронталь, с добавлением верхнего индекса, подчеркивающего, что эти линии лежат в плоскости проекций и принадлежат плоскости (поверхности).

Например: h^0 − горизонтальный след плоскости (поверхности);

f^0 − фронтальный след плоскости (поверхности);

p^0 − профильный след плоскости (поверхности).

Основные операции:

$\parallel$ − параллельность элементов;

$\equiv$ − совпадение двух геометрических элементов;

$\perp$ − перпендикулярность элементов;

^ − знак, соответствующий союзу «и»;

= − результат геометрической операции;

$\cap$ − пересечение двух элементов;

$\in$ − знак принадлежности и включения для точки;

$\cup$ − знак объединения;

$\subset$ − принадлежность одного геометрического элемента другому;

$\dot{-}$ − скрещивающиеся прямые.

1.2. Из истории начертательной геометрии

Начертательная геометрия как наука была создана в конце XVIII века великим французским геометром и инженером Гаспаром Монжем (1746 – 1818).

Первые идеи об ортогональном проецировании пространственных фигур на плоскость высказывались еще задолго до Монжа в XVI веке немецким математиком и художником Альбрехтом Дюрером (1471 –1528), который разработал метод ортогонального изображения конических сечений и некоторых пространственных кривых.

В 1637 г. французский геометр и философ Рене Декарт (1596 – 1650) создал метод координат и заложил основы аналитической геометрии, а его соотечественник, инженер и математик Жирар Дезаг (1593 – 1662), использовал этот метод координат для построения перспективных проекций и обосновал теорию аксонометрических проекций.

В XVII веке в России успешно развивались технические чертежи, выполненные в виде планов и профилей в масштабе. Здесь в первую очередь следует назвать чертежи выдающегося русского механика и изобретателя И. П. Кулибина (1735 – 1818). В его проекте деревянного арочного моста впервые были использованы ортогональные проекции (1773).

Большой вклад в развитие ортогональных проекций внес французский инженер А. Фрезье (1682 –1773), который впервые рассмотрел проецирование объекта на две плоскости – горизонтальную и фронтальную.

Величайшей заслугой Г. Монжа явилось обобщение всех научных трудов его предшественников, всей теории о методах изображения пространственных фигур и создание единой математической науки об ортогональном проецировании – начертательной геометрии.

Рождение этой новой науки почти совпало с основанием в Петербурге первого в России высшего транспортного учебного заведения – Института Корпуса инженеров путей сообщения (2 декабря 1809 г.)
Питомцы этого института, его профессора и ученые внесли большой вклад в развитие геометрических методов изображения, в теорию и практику начертательной геометрии.

1.3. Способы проецирования

Проекцией точки A на плоскость проекций π_1 называется точка A_1 пересечения проецирующей прямой ℓ с плоскостью проекций π_1, проходящей через точку A, (рис. 1.1):
Проекция любой геометрической фигуры есть множество проекций всех ее точек. Направление проецирующих прямых ℓ и положение плоскостей π_1 определяют аппарат проецирования.

Центральным проецированием называется такое проецирование, при котором все проецирующие лучи исходят из одной точки S – центра проецирования (рис. 1.2).
Параллельным проецированием называют такое проецирование, при котором все проецирующие прямые параллельны заданному направлению S (рис. 1.3).

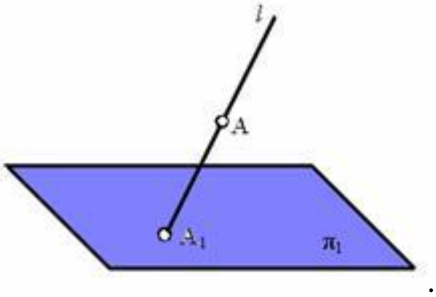


Рис. 1.1. Проекция точки A на плоскость проекций π_1

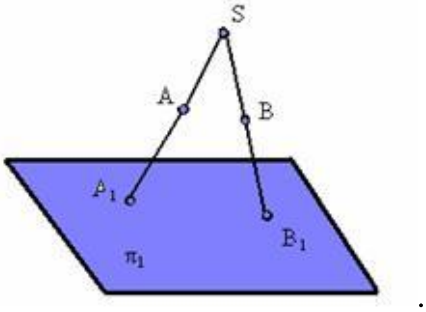


Рис. 1.2. Пример центрального проецирования

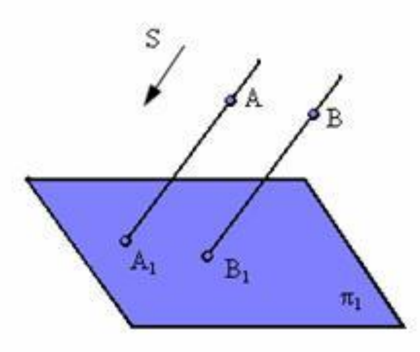


Рис. 1.3. Пример параллельного проецирования

Параллельное проецирование представляет собой частный случай центрального проецирования, когда точка S находится на бесконечно большом расстоянии от плоскости проекций π_1.

При заданном аппарате проецирования каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций.

Одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве. Действительно, проекции A_1 может соответствовать бесчисленное множество точек A', A'', …, расположенных на проецирующей прямой ℓ (рис. 1.4).

Для определения положения точки в пространстве при любом аппарате проецирования необходимо иметь две ее проекции, полученных при двух различных направлениях проецирования (или при двух различных центрах проецирования).

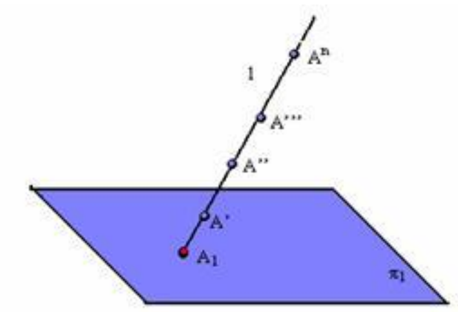


Рис. 1.4. Пример расположения множества точек на проецирующей прямой

Так, из рис. 1.5 видно, что две проекции точки A (A_1 и A_2), полученные при двух направлениях проецирования S_1 и S_2 , определяют единственным образом положение самой точки A в пространстве – как пересечение проецирующих прямых ℓ_1 и ℓ_2, проведенных из проекций A_1 и A_2 параллельно направлениям проецирования S_1 и S_2.

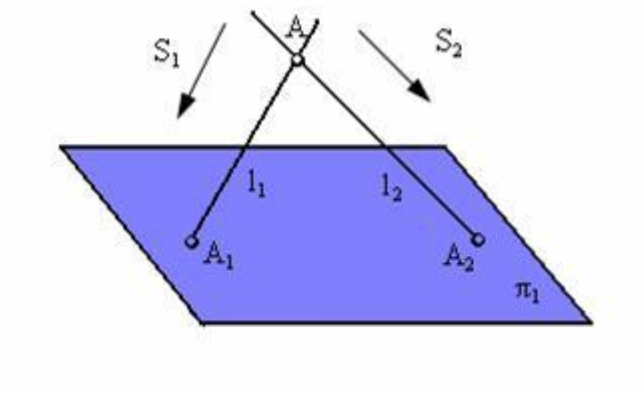


Рис. 1.5. Определение положения точки А в пространстве

1.4. Инвариантные свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры в общем случае проецируются на плоскость проекций с искажением. Проекции не сохраняют линейные и угловые величины оригинала. Характер искажений зависит от положения геометрической фигуры в пространстве, от аппарата проецирования и от положения плоскости проекций.

Однако некоторые геометрические свойства фигур остаются неизменными в процессе проецирования. Такие свойства геометрических фигур называются независимыми или инвариантными для данного аппарата проецирования.

Рассмотрим основные инвариантные свойства параллельного проецирования.

1. Проекция точки есть точка

Это очевидно из самого определения проекции как точка пересечения проецирующей прямой с плоскостью.

2. Проекция прямой есть прямая (рис. 1.6)

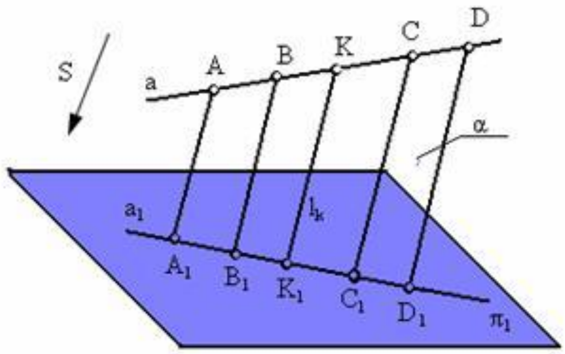


Рис. 1.6. Инвариантные свойства 2, 3, 4

Все проецирующие прямые, проходящие через точки прямой a параллельно направлению проецирования S, образуют проецирующую, или лучевую, плоскость α.

Проекция прямой a на плоскость π_1 определяется как линия пересечения этой лучевой плоскостиαс плоскостью π_1, т. е. прямая

Если точка К принадлежит прямой а, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой (рис. 1.6).

Это свойство следует непосредственно из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех точек.

Если точка К принадлежит прямой а и плоскости α, то и проецирующий луч l_K принадлежит плоскости α. Следовательно, этот луч пересечет плоскость π_1 в линии пересечения плоскостей α и π_1, т. е. в точке K_1, принадлежащей проекции прямой a_1.

4. Если точка К делит отрезок AD в отношении m : n то и проекция этой точки делит в таком же отношении проекцию этого отрезка (рис. 1.6):

Фигура ADD_1A_1 – трапеция. Прямая KK_1 параллельна основаниям трапеции AA_1 и DD_1, следовательно делит ее стороны AD и A_1D_1 на пропорциональные части.

5. Проекция точки пересечения прямых есть точка пересечения проекций этих прямых (рис. 1.7)

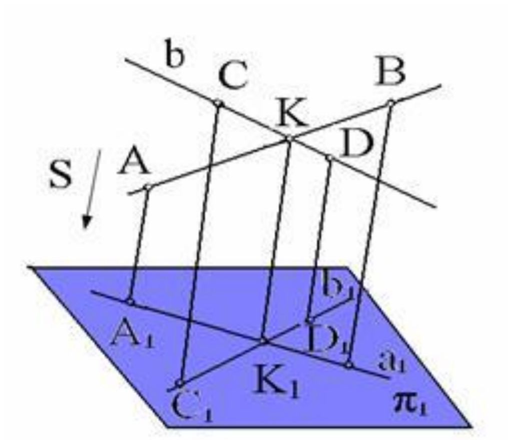


Рис. 1.7. Пример инвариантного свойства 5

Действительно, точка К принадлежит одновременно прямым AB и CD. По третьему инвариантному свойству проекция этой точки K_1 должна принадлежать проекциям этих прямых, т. е. должна являться точкой пересечения этих проекций.

6. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 1.8)

Лучевые плоскости α и β, проходят через параллельные прямые AB и CD. Они параллельны, так как две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости ($AB \parallel CD$ и $AA_1 \parallel CC_1$). Но две параллельные плоскости пересекаются с третьей по параллельным прямым, следовательно, $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

7. Плоский многоугольник в общем случае проецируется в многоугольник с тем же числом вершин.

Исключение составляет многоугольник (плоская ломаная или кривая линия) расположенный в проецирующей (лучевой) плоскости. Такой многоугольник проецируется в прямую линию (рис. 1. 9).

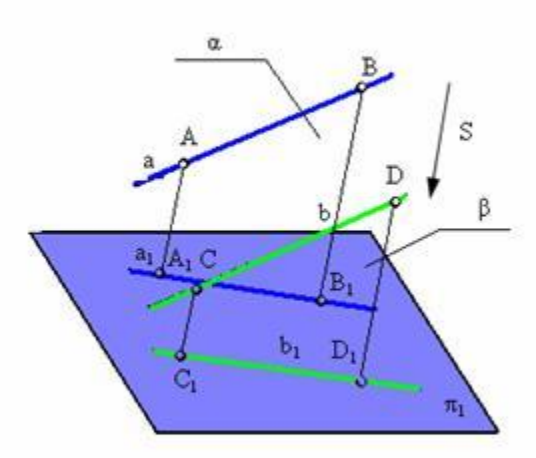


Рис. 1.8. Пример инвариантного свойства

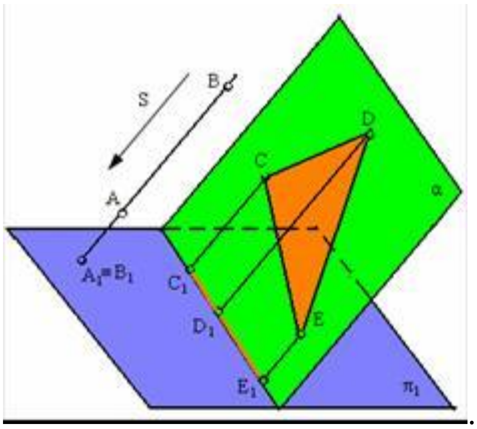


Рис. 1.9. Примеры инвариантных свойств 7, 8

8. Прямая, параллельная направлению проецирования, проецируется в точку (рис. 1.9)
9. Проекция плоской фигуры, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна этой фигуре (рис. 1.10).

Следствия этого инвариантного свойства следующие:

1. Проекция отрезка прямой, параллельной плоскости проекций, конгруэнтна и параллельна самому отрезку (рис. 1.10):
2. Проекция угла, стороны которого параллельны плоскости проекций, конгруэнтна этому углу (рис. 1.10).

1.5. Ортогональное проецирование

Направление проецирования перпендикулярно (ортогонально) плоскости проекций $S \perp \pi_1$ (рис. 1.11). Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования.

Ортогональное проецирование находит широкое применение в инженерной практике для изображения геометрических фигур на плоскости, т. к. обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием к которым можно отнести:

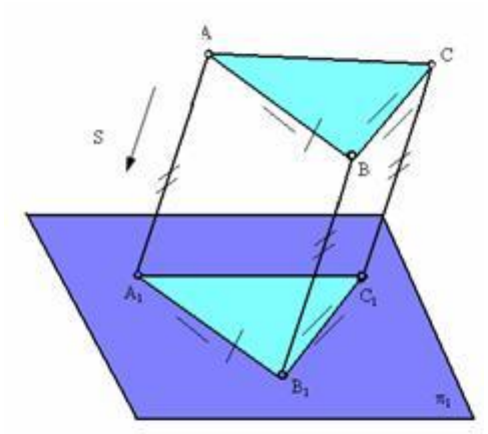


Рис. 1.10. Пример инвариантного свойства 9

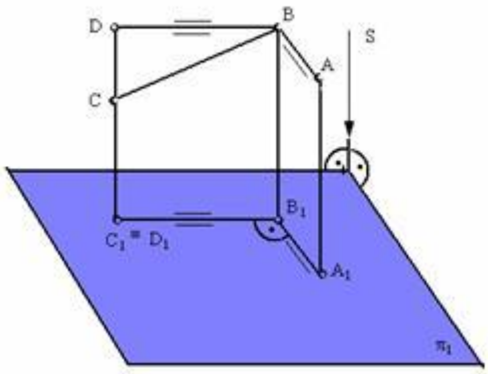


Рис. 1.11. Ортогональная проекция прямого угла

а) простоту графических построений для определения ортогональных проекций точек;
б) возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

Указанные преимущества обеспечили широкое применение ортогонального проецирования в технике, в частности для составления машиностроительных чертежей.

Для ортогонального проецирования справедливы все девять инвариантных свойств, рассмотренных выше. Кроме того, необходимо отметить еще одно, десятое, инвариантное свойство, которое справедливо только для ортогонального проецирования.

10. Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения (рис. 1.11)

На рис. 1.11 показан прямой угол ABD, обе стороны которого параллельны плоскости проекций π_1. По инвариантному свойству 9 этот угол проецируется на плоскость π_1 без искажения, т. е. $\angle A_1B_1D_1=90°$.

Возьмем на проецирующем луче DD_1 произвольную точку C, тогда полученный $\angle$ ABC будет прямым, т. к. $AB \perp BB_1DD_1$.

Проекцией этого прямого угла ABC, у которого только одна сторона AB параллельна плоскости проекций π_1, будет прямой угол $A_1B_1D_1$.

1.6. Система трех плоскостей проекций. Эпюр Монжа

Все пространственные геометрические фигуры могут быть ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координатных осей - системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 1.12).

Эти координатные плоскости обозначаются:
1. Горизонтальная плоскость проекций - π_1;
2. Фронтальная плоскость проекций - π_2;
3. Профильная плоскость проекций - π_3.

Линии пересечения этих плоскостей образуют координатные оси: ось абсцисс – X; ось ординат – Y; ось аппликат – Z. Точка O пересечения координатных осей принимается за начало координат и обозначается буквой O. Положительными направлениями осей считают: для оси x − влево от начала координат, для оси Y − в сторону зрителя от плоскости π_2, для оси z – вверх от плоскости π_1; противоположные направления считают отрицательными.

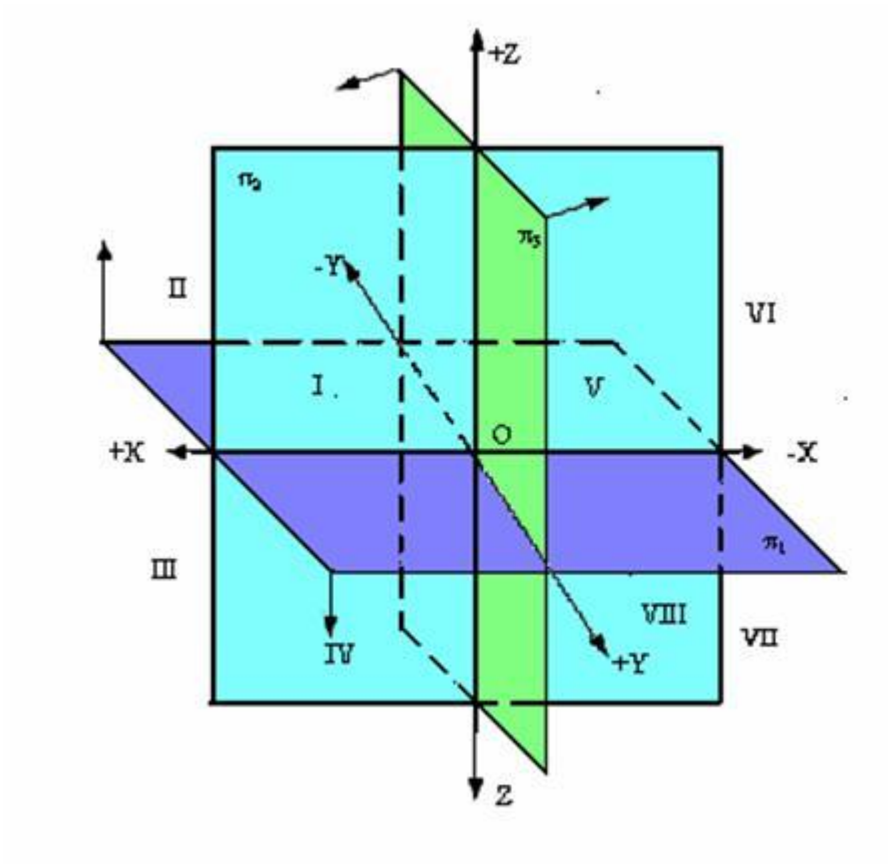


Рис. 1.12. Изображение системы трех плоскостей проекций

Для упрощения дальнейших рассуждений будем рассматривать только часть пространства, расположенную влево от профильной плоскости проекций π_3.

При таком допущении три координатные плоскости проекций образуют четыре пространственных угла – октанта (в общем случае – 8 октантов).

Из рис. 1.12 видно, что ось абсцисс X делит горизонтальную плоскость проекций π_1 на две части: переднюю полу π_1 (оси X и Y) и заднюю полу π_1 (оси X и - Y).

Ось абсцисс X делит фронтальную плоскость проекций π_2 также на две части: верхнюю полу π_2 (оси X и Z) и нижнюю полу π_2 (оси X и - Z).

Оси ординат Y и аппликат Z делят профильную плоскость проекций π_3 на четыре части:

1. Верхнюю переднюю полу π_3 (оси Y и Z)
2. Верхнюю заднюю полу π_3 (оси –Y и Z)
3. Нижнюю переднюю полу π_3 (оси Y и –Z)
4. Нижнюю заднюю полу π_3 (оси – Y и –Z)

Для того, чтобы получить плоскую (двухмерную) модель пространственных координатных плоскостей проекций, горизонтальную π_1 и профильную π_3 плоскости совмещают с фронтальной π_2 в том порядке как это показано стрелками на рис. 1.12.

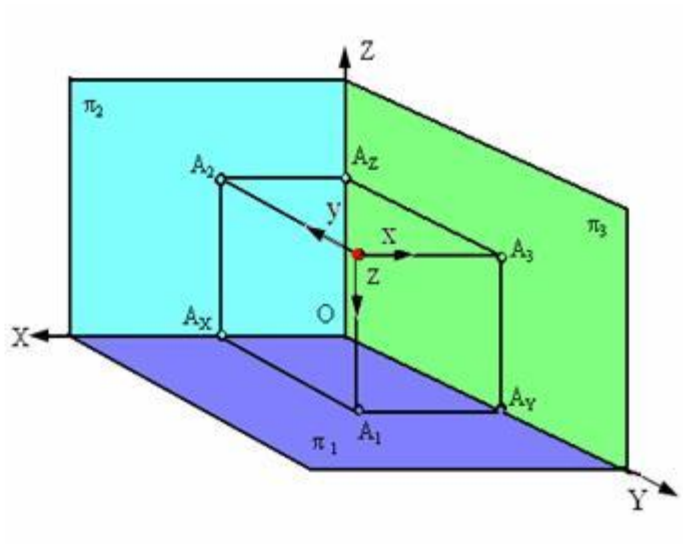


Рис. 1.13. Пространственная модель точки А

При этом горизонтальная плоскость проекций π_1 вращается вокруг оси X на 90°, а профильная плоскость проекций π_3 вращается вокруг оси Z также на 90° (направление вращения показано на рис. 1.12).

Полученное таким образом совмещение трех плоскостей проекций (рис. 1.13) является плоской моделью системы трех пространственных координатных плоскостей.

Для построения плоской модели пространственной геометрической фигуры каждая ее точка проецируется ортогонально на плоскости проекций π_1, π_2 и π_3, которые затем совмещаются в одну плоскость. Полученная таким образом плоская модель пространственной геометрической фигуры называется эпюром Монжа.

Порядок построения эпюры точки, расположенной в первом октанте.

На рис. 1.13 изображена пространственная точка А, координаты которой (x, y, z) показывают величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций.

Для того чтобы получить ортогональные проекции точки А, необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций.

Точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостями проекций образуют проекции точки А:

A_1 – горизонтальную проекцию точки;

A_2 – фронтальную проекцию точки;

A_3 – профильную проекцию точки.

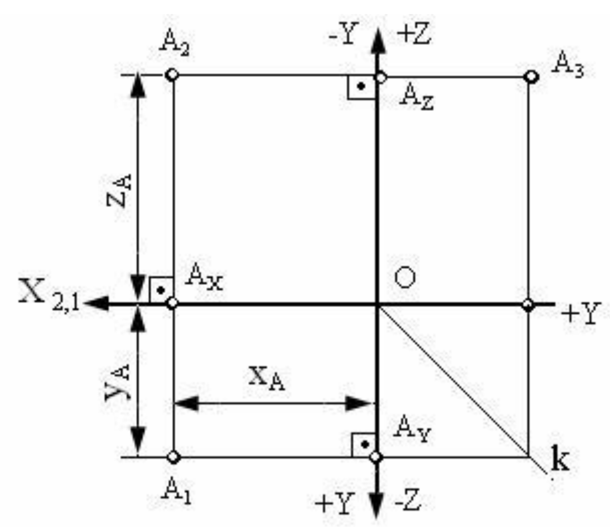


Рис. 1.14. Эпюр точки А

На рис. 1.14 плоскости проекций π_1 и π_3 совмещены с плоскостью чертежа (с плоскостью проекции π_2), а вместе с ними совмещены с плоскостью чертежа и проекции точки А (A_1, A_2, A_3) и таким образом получена плоскостная модель координатных плоскостей проекций и плоскостная модель пространственной точки А – ее эпюра.

Положение проекций точки А на эпюре однозначно определяется ее тремя координатами (рис. 1.14).

На рис. 1.13 и рис. 1.14 также видно, что на эпюре горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси X, а также фронтальная и профильная проекции – на одном перпендикуляре к оси Z:

$$\mathbf{A_1A_2 \perp X,\ A_2A_3 \perp Z.}$$

Из рис 1.12 видно, что точки, расположенные в различных октантах, имеют определенные знаки координат.

В таблице приведены знаки координат точек, расположенных в различных октантах

Таблица знаков координат

Октанты	Знаки координат		
	X	Y	Z
1	+	+	+
2	+	-	+
3	+	-	-
4	+	+	-
5	-	+	+
6	-	-	+
7	-	-	-
8	-	+	-

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается идея метода проецирования?

2. В чем заключается сущность центрального проецирования и каковы его основные свойства?

3. В чем заключается сущность параллельного проецирования и каковы его основные свойства?

4. В чем заключается сущность ортогонального (прямоугольного) проецирования?

5. Как формулируется теорема о проецировании прямого угла?

2. Точка, прямая и плоскость на комплексном чертеже

2.1. Точка. Прямая. Способы задания

Точка. как математическое понятие не имеет размеров. Очевидно, если объект проецирования является нульмерным образом, то говорить о его проецировании бессмысленно.

В геометрии под точкой целесообразно понимать физический объект, имеющий линейные измерения. Условно за точку будем принимать шарик с бесконечно малым радиусом. При такой трактовке понятия точки можно говорить о ее проекциях.

Прямая на комплексном чертеже может быть задана проекциями прямой; проекциями двух точек, принадлежащих прямой; проекциями отрезка прямой.

2.2. Свойства прямой на комплексном чертеже

1. Прямая линия определяется двумя точками, поэтому на комплексном чертеже всякая прямая может быть задана проекциями двух ее точек. Прямую на комплексном чертеже можно задать и ее проекциями.

2. Всякая непрофильная прямая вполне определяется двумя своими проекциями, для определения же профильной прямой необходимо задать на проекциях прямой проекции ее двух точек
3. Чтобы задать на одной профильной прямой какую-нибудь точку, достаточно задать ее проекции на одноименных проекциях данной прямой.
4. Для деления данного отрезка в данном отношении достаточно разделить в этом отношении одну из проекций данного отрезка, а затем спроецировать делящую точку на другую проекцию отрезка.

2.3. Частные положения прямой в пространстве

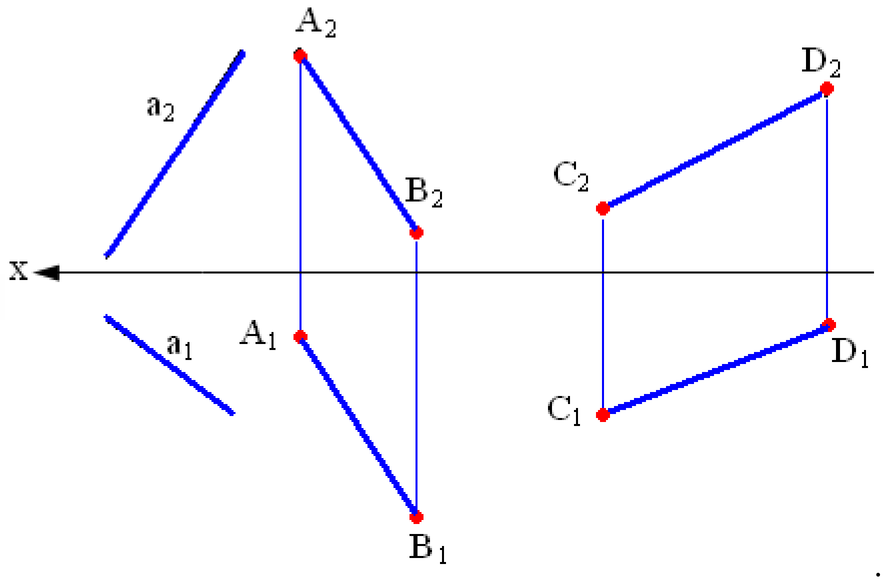


Рис. 2.1. Прямые общего положения

На рис. 2.1 показаны прямые общего положения, т. е. прямые, произвольно расположенные относительно плоскостей проекций.

Особый интерес представляют прямые частного положения, т. е. прямые, расположенные определенным образом относительно плоскостей проекций: параллельные, перпендикулярные и принадлежащие плоскостям проекций.

Рассмотрим изображение на эпюре и отметим основные свойства этих прямых.

<u>*Прямые, параллельные плоскостям проекций.*</u>

<u>1. Горизонтальная прямая h (рис. 2.2) – *горизонталь*</u>

Горизонтальная прямая – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1.

Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_1 (координаты Z всех точек прямой одинаковы), то фронтальная и профильная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям X и Y. На плоскость проекций π_1 проецируются без искажения отрезок прямой AB (A_1B_1=AB) и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_2 и π_3 (углы β^0 и γ^0).

<u>2. Фронтальная прямая f (рис. 2.3) – *фронталь*</u>

Фронтальная прямая – это прямая параллельная фронтальной плоскости проекций π_2. Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_2 (координаты Y всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и профильная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям X и Z. На плоскость проекций π_2 проецируются без искажений отрезок этой прямой CD (C_2D_2+CD) и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_1 и π_3 (углы α^{0} и γ^{0})

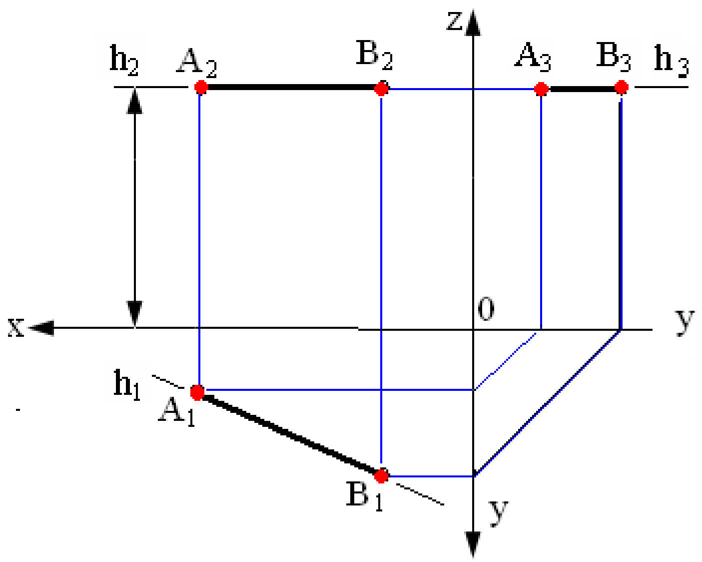


Рис. 2.2. Горизонтальная прямая

3. <u>Профильная прямая p</u> (рис. 2.4)
Профильная прямая – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3 . Так как все точки этой прямой равноудалены от плоскости проекций π_3 (координаты X всех точек прямой одинаковы), то горизонтальная и фронтальная проекции прямой соответственно параллельны координатным осям Y и Z. На плоскость проекций π_3 проецируется без искажения отрезок этой прямой EF (E_3F_3=EF)и углы наклона прямой к плоскостям проекций π_1 и π_2 (углы α^0 и β^0).

<u>Прямые, принадлежащие плоскостям проекций</u>

Прямые, принадлежащие плоскостям проекций, являются частным случаем горизонтальных, фронтальных и профильных прямых. Характерным признаком для эпюра, на котором изображена подобная прямая будет принадлежность одной из проекций прямой соответствующей оси.

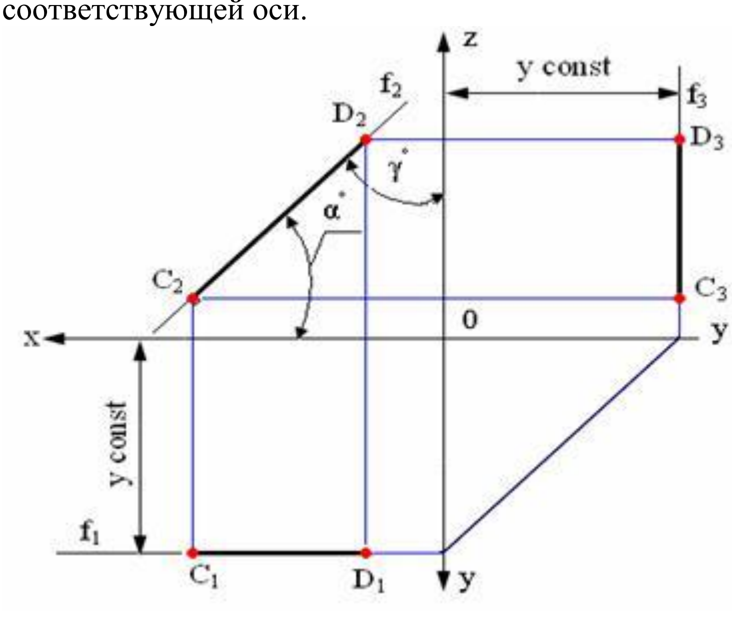


Рис. 2.3. Фронтальная прямая

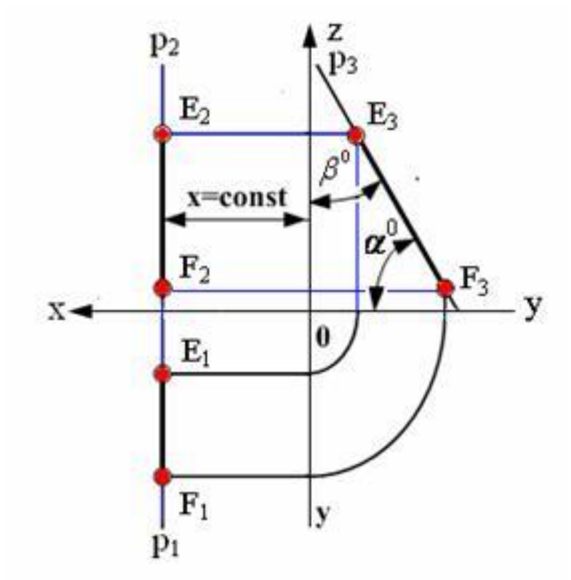


Рис. 2.4. Профильная прямая

На рис. 2.5, 2.6, 2.7 показаны прямые, принадлежащие соответственно горизонтальной плоскости проекций (частный случай горизонтальной прямой Z=0), фронтальной плоскости проекций (частный случай фронтальной прямой Y=0) и профильной плоскости проекций (частный случай профильной прямой X=0).

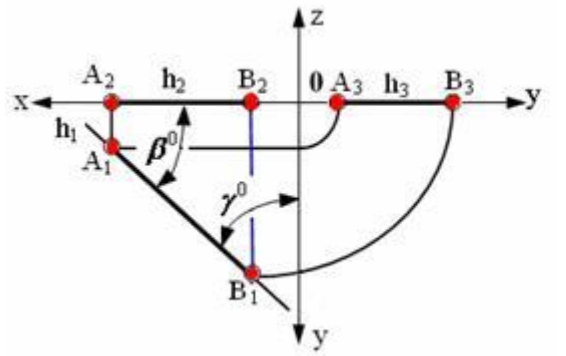


Рис. 2.5. Прямая, принадлежащая горизонтальной плоскости проекций

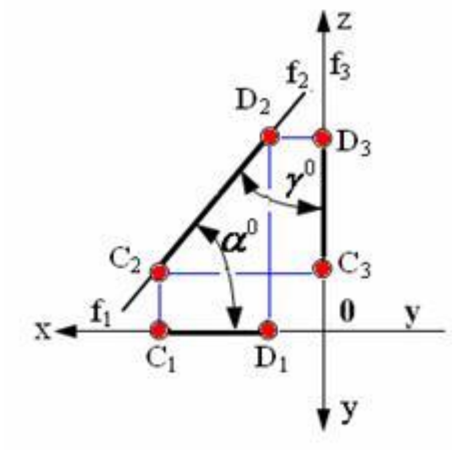


Рис. 2.6. Прямая, принадлежащая фронтальной плоскости проекций

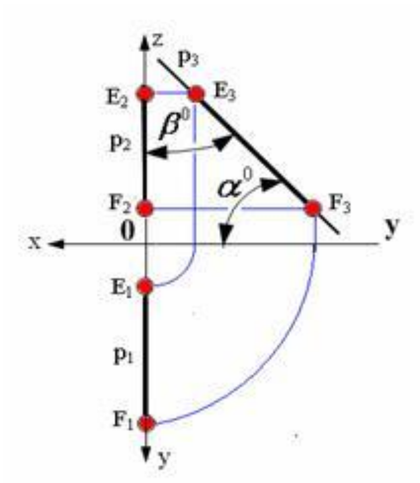


Рис. 2.7. Прямая, принадлежащая профильной плоскости проекций

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.

Проецирующие прямые

На рис. 2.8 и 2.9 показаны прямые, перпендикулярные соответственно горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций

Прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций – горизонтально-проецирующая прямая. Такая прямая проецируется на плоскость π_1 в точку; ее фронтальная проекция перпендикулярна оси X (рис. 2.8).

Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций – фронтально-проецирующая прямая. Эта прямая проецируется на плоскость π_2 в точку, а ее горизонтальная проекция перпендикулярна оси X (рис. 2.9).

Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций – профильно-проецирующая прямая. Эта прямая проецируется на плоскость π_3 в точку, а ее фронтальная проекция перпендикулярна оси Z.

Эти прямые являются частными случаями фронтали и горизонтали.

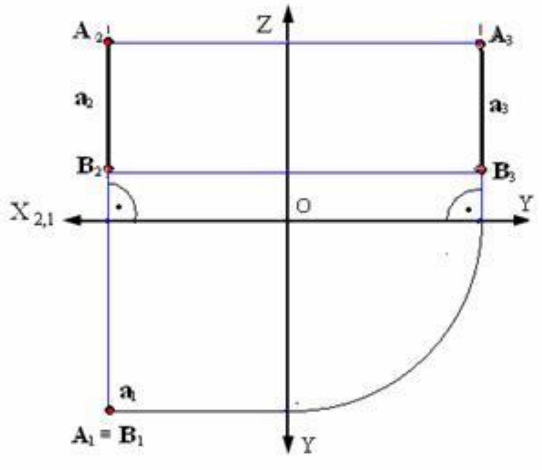


Рис. 2.8. Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций

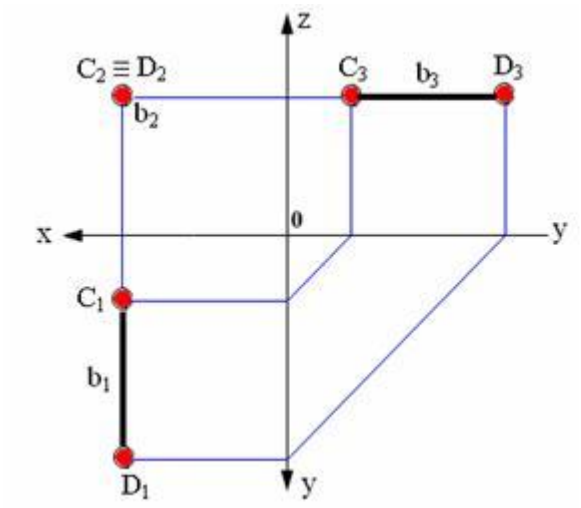


Рис. 2.9. Прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций

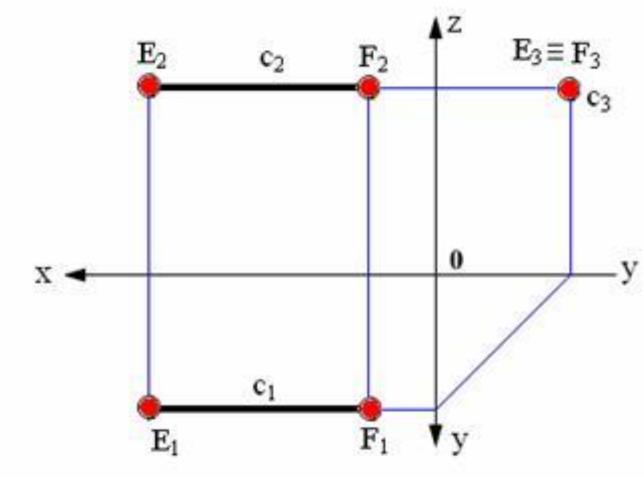
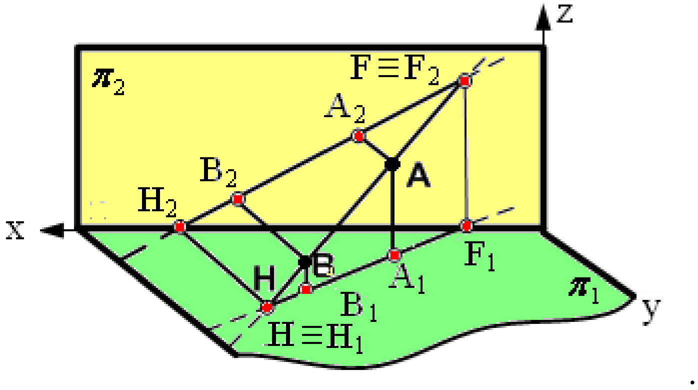
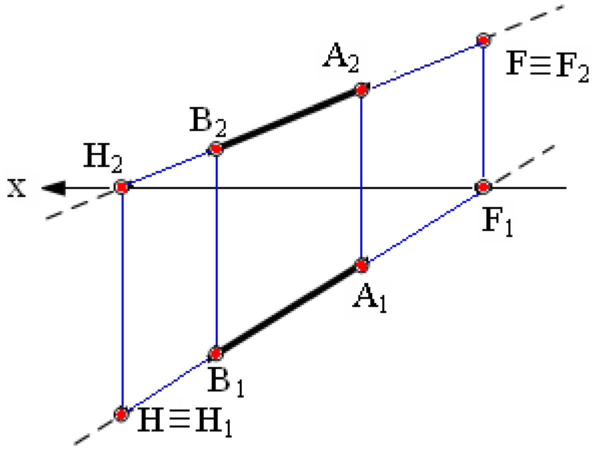


Рис. 2.10. Прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций

2.4. Следы прямой линии



а



б

Рис. 2.11. Изображение следов прямой линии: а – в пространстве; б – на эпюре

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

В системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2 прямая в общем случае имеет два следа:

1. Горизонтальный H (H_1, H_2);
2. Фронтальный F (F_1, F_2)

Это точки пересечения прямой соответственно с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций.

Установим правило нахождения следов прямой.

Для нахождения горизонтального следа прямой необходимо:

1) продолжить фронтальную проекцию прямой а до пересечения с осью X (получим точку $H_X \equiv H_2$)

2) восстановить перпендикуляр в точке H_X к оси X (провести линию связи перпендикулярную к оси X);

3) продолжить горизонтальную проекцию прямой а до пересечения с перпендикуляром;

4) полученная точка пересечения и будет являться горизонтальным следом прямой а $H \equiv H_1$

Для нахождения фронтального следа прямой необходимо:

1) продолжить горизонтальную проекцию прямой а до пересечения с осью X (точка $F_X \equiv F_1$);

2) восстановить перпендикуляр в точке F_X к оси X;

3) продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с перпендикуляром;

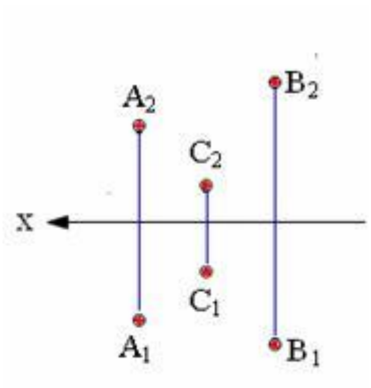
4) полученная точка пересечения $F \equiv F_2$ является фронтальным следом прямой а

В начертательной геометрии считается, что наблюдатель расположен в первом пространственном углу на бесконечном расстоянии от плоскостей проекций, поэтому видимыми геометрическими фигурами будут только те, которые расположены в первом октанте.

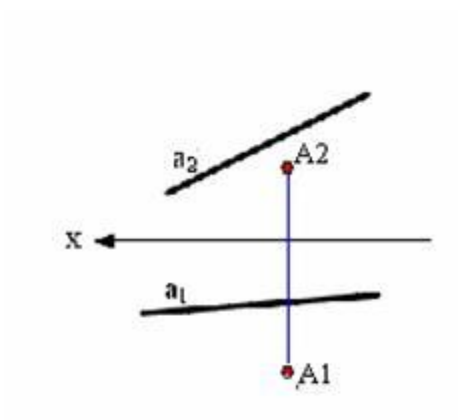
Проекции этих фигур в ортогональных и аксонометрических проекциях показываются сплошными линиями. Фигуры, расположенные в других пространственных углах, не видны наблюдателю, и их проекции показываются штриховыми линиями.

2.5. Плоскость. Способы задания

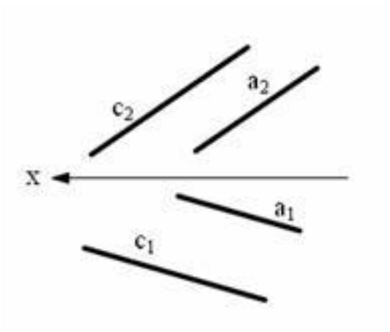
На эпюре плоскость может быть задана графически одним из следующих способов, показанных на рис. 2.12.



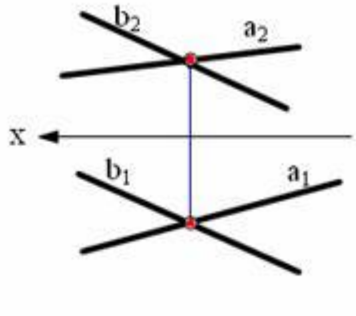
а



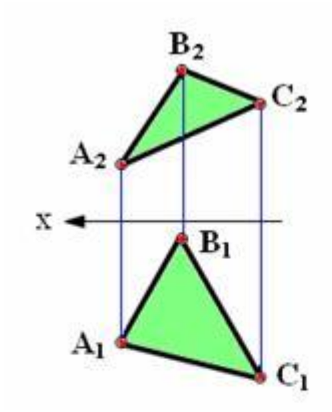
б



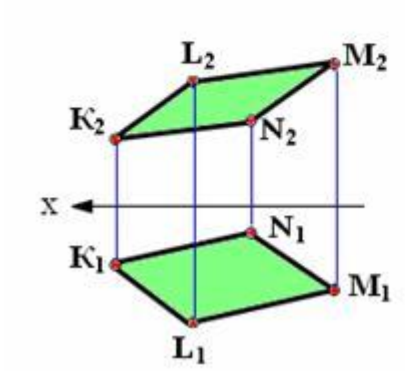
в



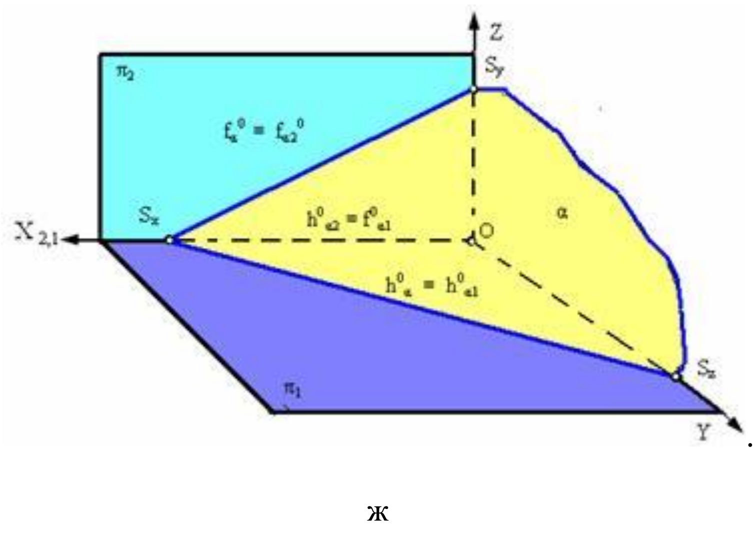
г



д



е



ж

Рис. 2.12. Способы задания плоскости: а − тремя точками не лежащими на одной прямой; б − прямой и точкой вне ее; в − двумя пересекающимися прямыми; г − двумя параллельными прямыми; д, е − плоской фигурой; ж − следами плоскости.

2.6. Частные положения плоскостей в пространстве

Плоскость общего положения

Плоскость, которая занимает произвольное положение по отношению к плоскости проекций (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекций – произвольные, но отличные от 0° и 90°) называется плоскостью общего положения (рис. 2.16.а).

На комплексном чертеже следы плоскости общего положения составляют с осью проекций также произвольные углы.

Рассмотрим изображение на комплексном чертеже и свойства плоскостей частного положения: плоскости, перпендикулярные и параллельные плоскостям проекции.

Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекций (проецирующие плоскости).

1. Горизонтально-проецирующая плоскость а $\perp \pi_1$.

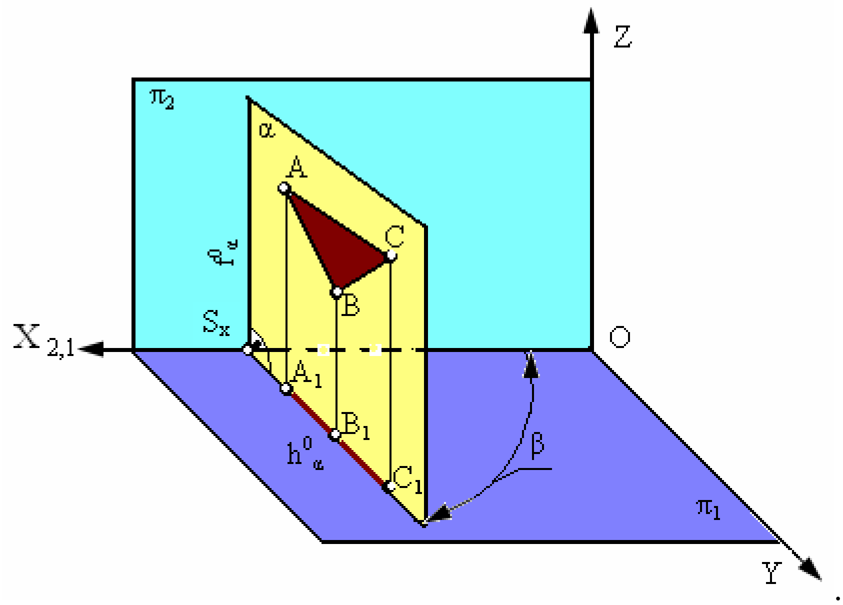


Рис. 2.13. Горизонтально-проецирующая плоскость

Плоскость α, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекции π_1, называется горизонтально-проецирующей (рис. 2.13).

Основным свойством горизонтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на π_1 в прямую линию (горизонтальный след плоскости h_{0a}).

Угол β, который составляет горизонтальный след плоскости h_{0a} с координатной осью X, равен углу наклона плоскости а к плоскости проекций π_2. Фронтальный след такой плоскости перпендикулярен оси X ($f_{0a} \perp X$).

2. Фронтально-проецирующая плоскость β $\perp \pi_2$. Плоскость b перпендикулярная фронтальной плоскости проекций π_2 называется фронтально проецирующей (рис. 2.14).

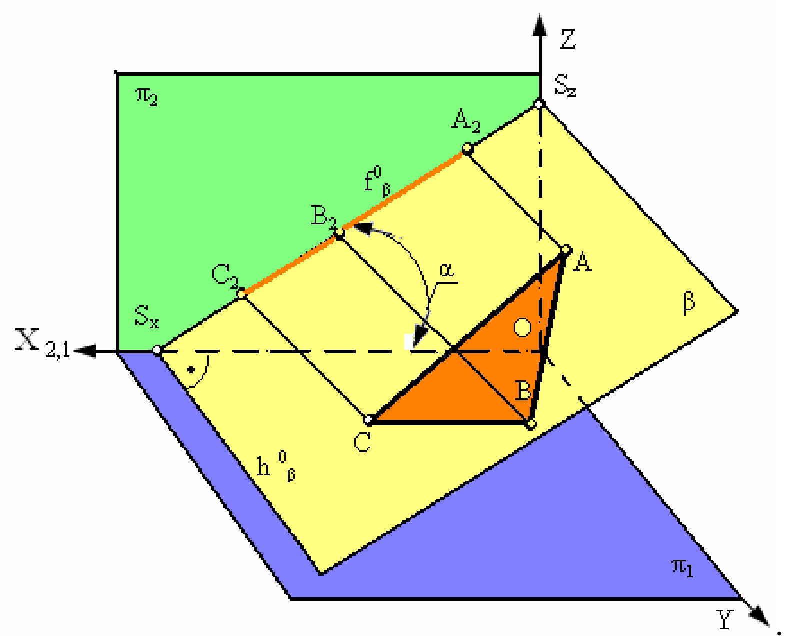


Рис. 2.14. Фронтально-проецирующая плоскость

Основным свойством фронтально-проецирующей плоскости является то, что любая фигура. Расположенная в этой плоскости, проецируется на π_2 в прямую линию (фронтальный след плоскости f_{0b}). Угол α, который составляет фронтальный след плоскости f_{0b} с координатной осью X, равен углу наклона плоскости β к плоскости проекций π_1. Горизонтальный след такой плоскости перпендикулярен оси X.

Плоскости, параллельные плоскостям проекций (плоскости уровня)

1. Горизонтальная плоскость $\gamma \parallel \pi_1$.

Плоскость γ, параллельная плоскости π_1, называется горизонтальной (рис. 2.15).

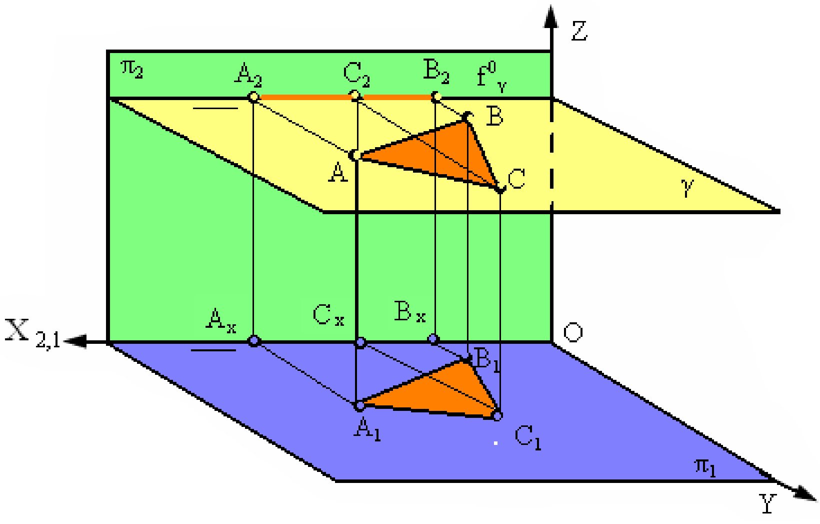


Рис. 2.15. Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций

Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину ($\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$, рис. 17). Фронтальный след этой плоскости параллелен оси X ($f_{0\gamma} \parallel X$).

2. Фронтальная плоскость $\delta \parallel \pi_2$.

Плоскость δ, параллельная плоскости π_2, называется фронтальной.

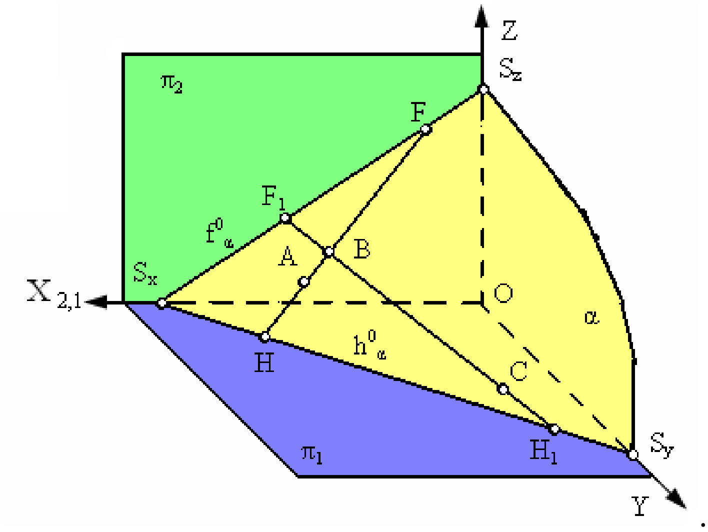
Любая фигура расположенная в такой плоскости. Проецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения, т. е. в натуральную величину.

Горизонтальный след фронтальной плоскости параллелен оси X.

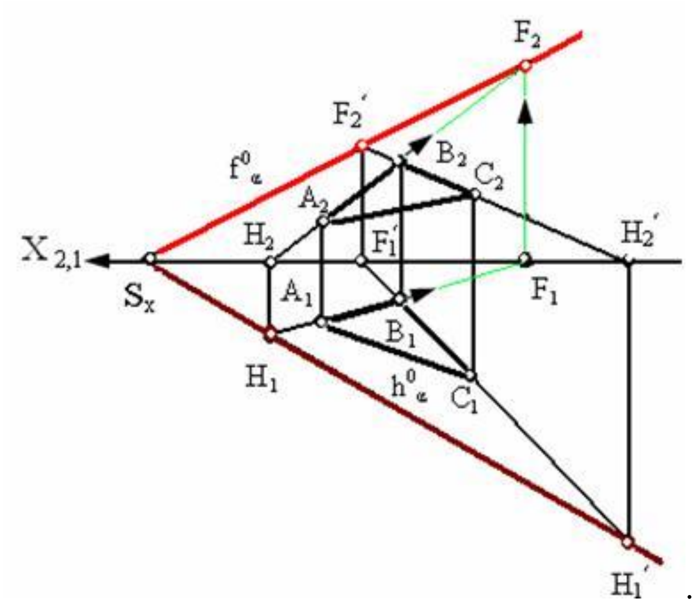
Примечание. Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, является частным случаем проецирующих плоскостей.

2.7. Следы плоскости

Следом плоскости а называется линия пересечения этой плоскости с плоскостью проекций.



а



б

Рис. 2.16. Пример изображения следов плоскости: а - в пространстве; б - на комплексном чертеже

В системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2 плоскость в общем случае имеет два следа: горизонтальный h_a^0 и фронтальный f_a^0, которые являются пересечением плоскости а соответственно с горизонтальной и фронтальной плоскостями проекций (рис. 2.16).

Точки пересечения плоскости а с координатными осями X, Y, Z называются точками схода следов и обозначаются соответственно S_x, S_y, S_z (рис. 2.16.а).

Вопросы для самоконтроля

1. В чем сущность построения эпюра точки?

2. Какие координаты точки однозначно определяют ее положение в пространстве?
3. Какие линии называют прямыми: а) общего; б) частного положения?
4. Какая прямая параллельна (перпендикулярна) плоскости проекций?
5. Как строят профильную проекцию точки?
6. Что называется следом прямой и как он определяется?
7. Какие плоскости являются плоскостями частного положения?
8. Что называется следом плоскости и как он определяется?
9. Как называется прямая, которая принадлежит плоскости и перпендикулярна линиям уровня этой плоскости?

3. Взаимное расположение геометрических элементов. Основные позиционные задачи

3.1. Определение позиционных задач

Позиционными задачами называются такие задачи, в которых определяется взаимное расположение различных геометрических фигур относительно друг друга.

3.2. Метод конкурирующих точек

Метод конкурирующих точек используется в начертательной геометрии для определения взаимной видимости двух геометрических фигур.

Конкурирующими точками называются такие точки пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции.

На рис. 3.1 показаны конкурирующие точки A и B (совпадают горизонтальные проекции $A_1 \equiv B_1$) и C и D (совпадают фронтальные проекции $C_2 \equiv D_2$).

Метод конкурирующих точек заключается в определении взаимной видимости точек (фигур) по их несовпадающим проекциям. Точка B находится выше точки A относительно плоскости π_1 ($Z_B > Z_A$), поэтому на плоскости π_1 видна точка B, которая закрывает точку A (считается, что наблюдатель смотрит на плоскости проекций из бесконечности и направление луча зрения параллельно проецирующему лучу S).

На плоскости π_2 видна точка D, так как она находится ближе к наблюдателю (дальше от плоскости π_2, $Y_D > Y_C$) и закрывает невидимую точку C.

Методом конкурирующих точек пользуются при определении видимости пересекающихся геометрических фигур.

3.3. Прямая и точка

Из инвариантного свойства 3 параллельного проецирования следует, что проекции точки K (K_1, K_2 и K_3) принадлежащие прямой a, должны принадлежать соответствующим проекциям этой прямой, т. е. *если хотя бы одна проекция точки не принадлежит соответствующей проекции прямой, то эта точка не принадлежит прямой.*

Из инвариантного свойства 4 следует, что проекции точки K (K_1, K_2 и K_3), принадлежащие прямой AB, делят соответствующие проекции отрезка в том же отношении, в каком точка K делит отрезок AB (рис. 3.2).

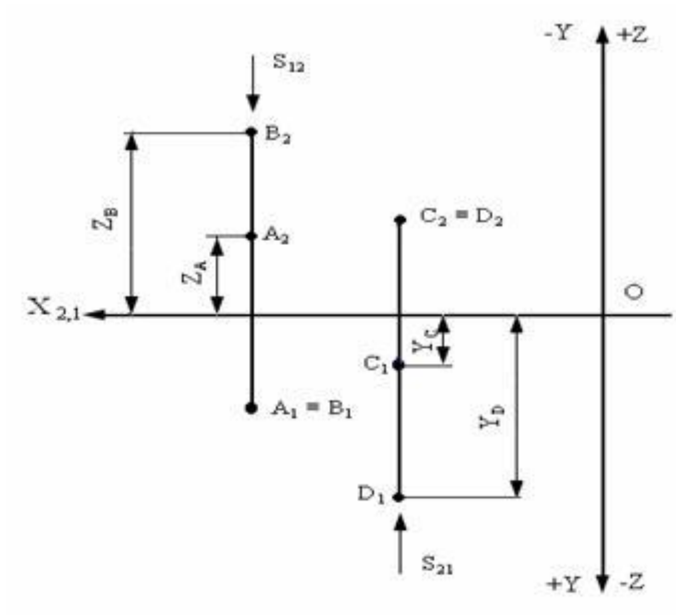


Рис. 3.1. Конкурирующие точки

Точки A и B, принадлежащие прямой a, и точки C, D и E, которые лежат вне этой прямой показаны на рис. 3.3.

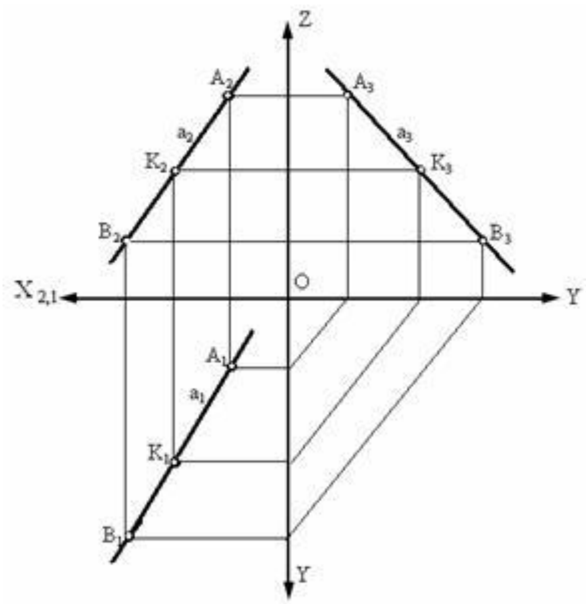


Рис. 3.2. Изображение принадлежности точек A, B, K прямой a

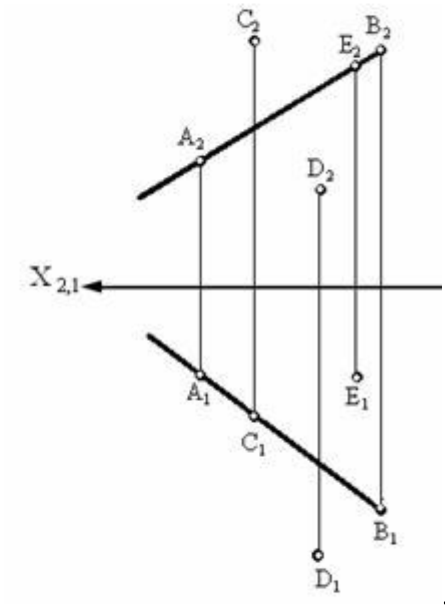


Рис. 3. 3. Пример принадлежности точек прямой

3.4. Взаимное положение прямых

Две прямые в пространстве могут пересекаться, скрещиваться и могут быть параллельны.

1. Пересекающиеся прямые

Пересекающимися прямыми называются такие прямые, которые имеют одну общую точку.

Из инвариантного свойства 5 следует, что проекция точки пересечения проекций прямых a и b есть точка пересечения этих прямых (рис. 3.4).

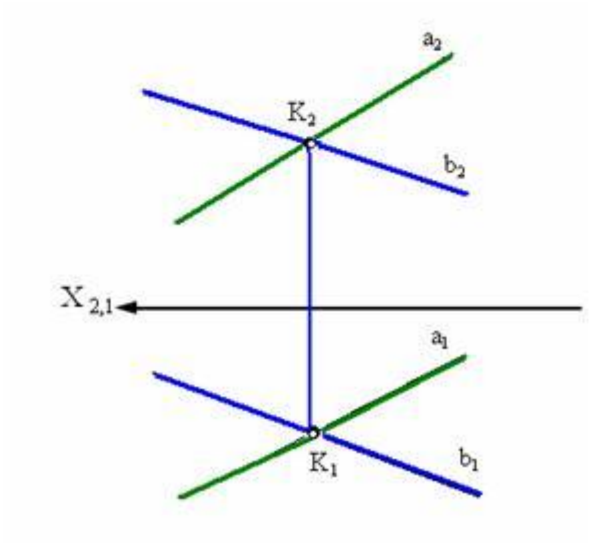


Рис. 3.4. Пересекающиеся прямые

2. Параллельные прямые

На рис. 3.5 изображены параллельные прямые – прямые, пересекающиеся в несобственной точке (прямые, лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в бесконечно удаленной точке).

Из инвариантного свойства 6 следует, что проекции параллельных прямых a и b параллельны.

3. *Скрещивающиеся прямые*

Скрещивающиеся прямые – это прямые, не лежащие в одной плоскости, это прямые не имеющие ни одной общей точки.
На комплексном чертеже (рис. 3.6) точки пересечения проекций этих прямых не лежат на одном перпендикуляре к оси X (в отличие от пересекающихся прямых, см. рис. 3.4).

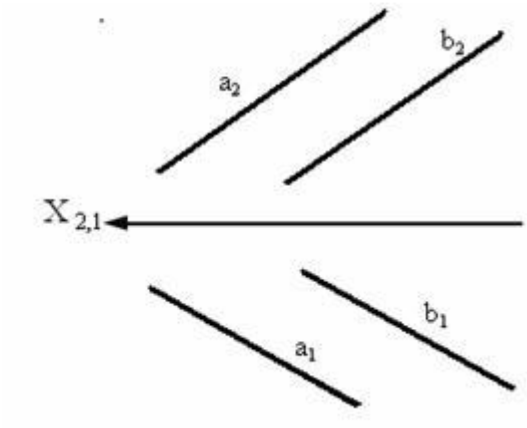


Рис. 3.5. Изображение параллельных прямых

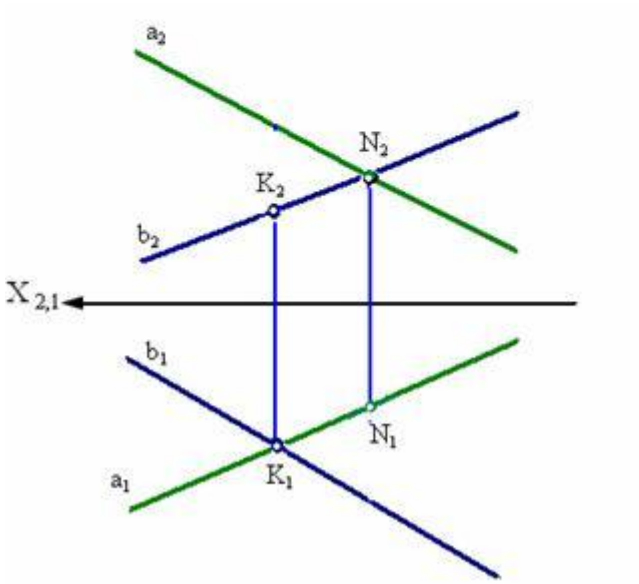


Рис. 3.6. Скрещивающиеся прямые

3.5. Прямая и точка на плоскости

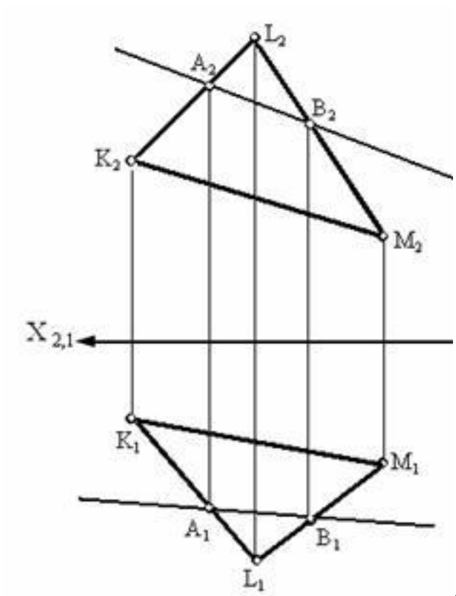
Прямая АВ принадлежит плоскости α, если две ее точки А и В принадлежат этой плоскости α. (ΔKLM) Справедливо и обратное утверждение: если точки А и В принадлежат плоскости α ((ΔKLM), то пряма АВ, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости α.

Прямые АВ и CD, принадлежащие разным плоскостям показаны на рис. 3. 7. Прямая АВ принадлежит плоской фигуре LKM, потому что на проекциях прямой и плоской фигуры имеются две общих точки. Прямая CD принадлежит плоскости, заданной параллельными прямыми c и d, т. к. она проходит через точки С и D, расположенные на этих прямых.

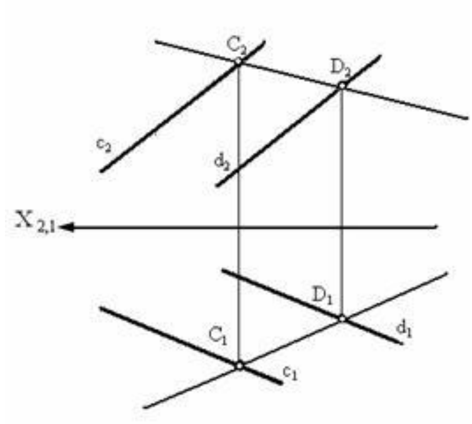
Прямая принадлежит плоскости, если ее следы принадлежат одновременно следам плоскости.

Справедливо и обратное утверждение: если следы прямой принадлежат следам плоскости, то эта прямая принадлежит плоскости.

Кроме того, существует еще одно свойство, определяющее взаимное положение точки и плоскости: точка принадлежит плоскости, если она расположена на прямой, принадлежащей этой плоскости (рис. 3.7).



а



б

Рис. 3.7. Изображение прямых, принадлежащих плоскостям

3.6. Взаимное положение прямой и плоскости

Рассмотрим два случая взаимного положения прямой и плоскости: прямая параллельная и перпендикулярная плоскости.

1. *Прямая параллельная плоскости.*

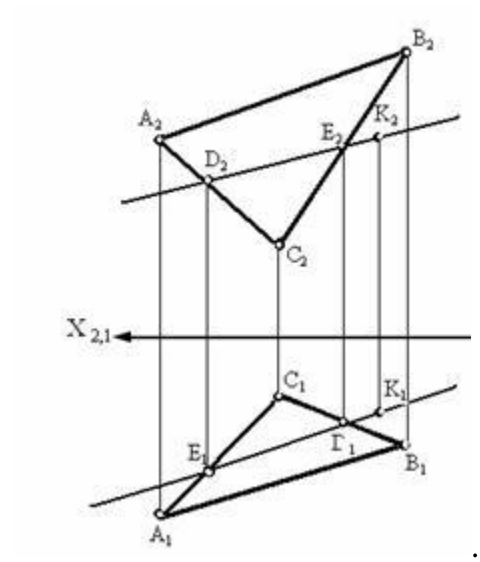
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой b, принадлежащей этой плоскости.

Прямые, параллельные плоскостям, заданным различными способами показаны на рис. 3.8.

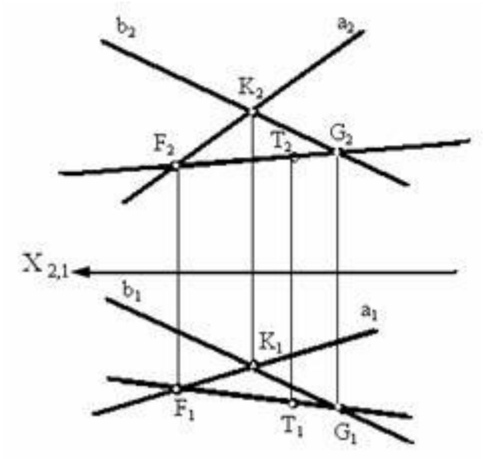
2. *Прямая перпендикулярная плоскости.*

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

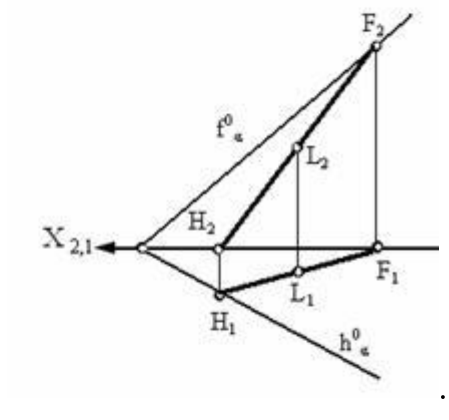
Подробно перпендикулярность прямых рассмотрена в лекции № 4.



а



б



в

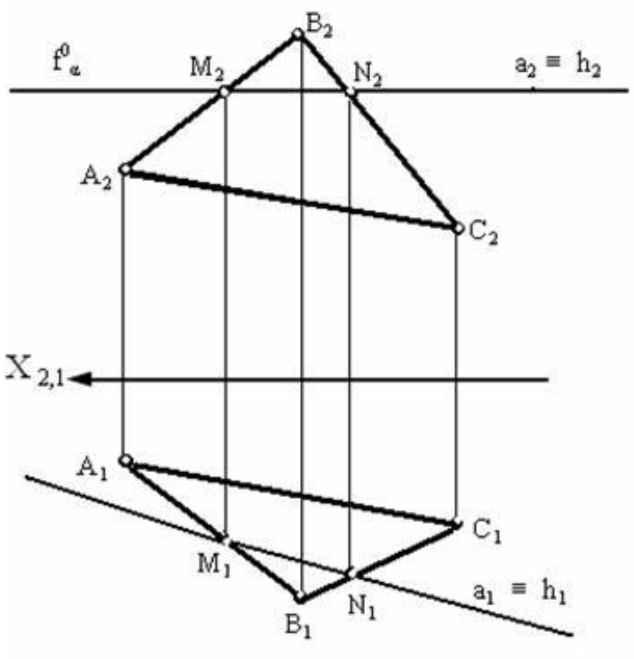
Рис. 3.8. Прямые, параллельные плоскостям, заданным:

а – плоскостью треугольника ABC; б – двумя пересекающимися прямыми a∩b; в – горизонтальным $h^0{}_\alpha$ и фронтальным $f^0{}_\alpha$ следами

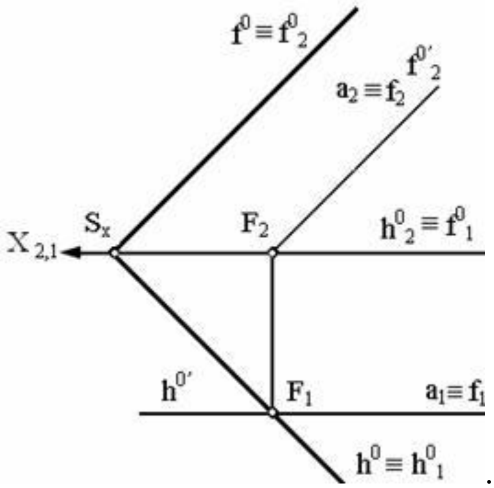
3.7. Пересечение прямой и плоскости

Линия пересечения двух плоскостей – прямая линия. Рассмотрим сначала частный случай (рис. 3.9), когда одна из пересекающихся плоскостей параллельна горизонтальной плоскости проекций ($\alpha \parallel \pi_1$, $f^0_\alpha \parallel X$). В этом случае линия пересечения a, принадлежащая плоскости α, будет также параллельна плоскости π_1, (рис. 3.9. а), т. е. будет совпадать с горизонталью пересекающихся плоскостей ($a \equiv h$).

Если одна из плоскостей параллельна фронтальной плоскости проекций (рис. 3.9. б), то линия пересечения a, принадлежащая этой плоскости, будет параллельна плоскости π_2 и будет совпадать с фронталью пересекающихся плоскостей ($a \equiv f$).



а



б

Рис. 3.9. Частный случай пересечения плоскости общего положения с плоскостями: а – горизонтального уровня; б – фронтального уровня

Пример построения точки пересечения (K) прямой a (AB) с плоскостью α (DEF) показан на рис. 3.10. Для этого прямая a заключена в произвольную плоскость β и определена линия пересечения плоскостей α и β.

В рассматриваемом примере прямые AB и MN принадлежат одной плоскости β и пересекаются в точке K, а так как прямая MN принадлежит заданной плоскости α (DEF), то точка K является и точкой пересечения прямой a (AB) с плоскостью α. (рис. 3.11).

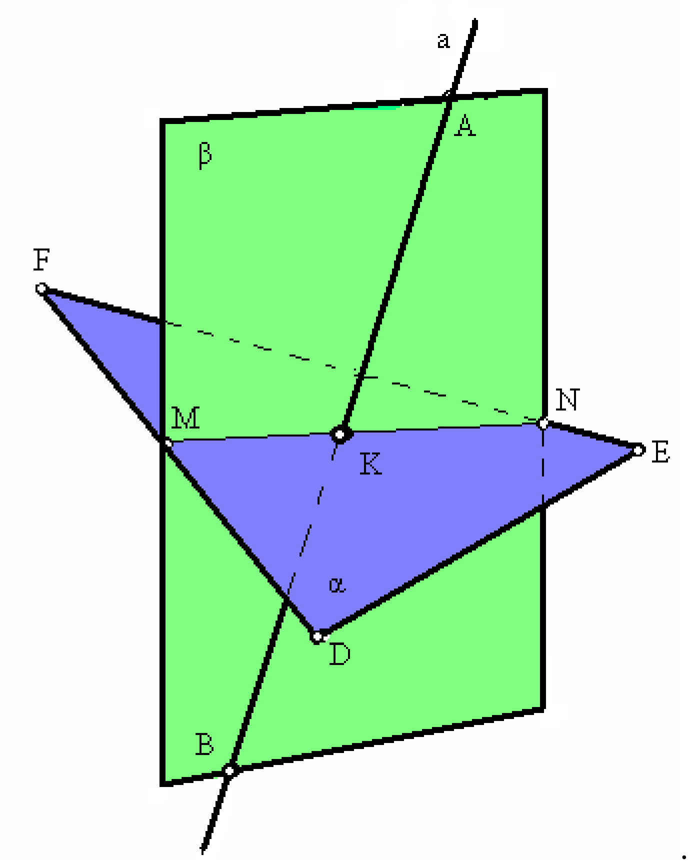


Рис. 3.10. Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Для решения подобной задачи на комплексном чертеже необходимо уметь находить точку пересечения прямой общего положения с плоскостью общего положения. Рассмотрим пример нахождения точки пересечения прямой AB с плоскостью треугольника DEF представленный на рис. 3.11.

Для нахождения точки пересечения через фронтальную проекцию прямой A_2B_2 проведена фронтально-проецирующая плоскость β которая пересекла треугольник в точках M и N. На фронтальной плоскости проекций (π_2) эти точки представлены проекциями M_2, N_2. Из условия принадлежности прямой плоскости на горизонтальной плоскости проекций (π_1) находятся горизонтальные проекции полученных точек M_1 N_1. В пересечении горизонтальных проекций прямых A_1B_1 и M_1N_1 образуется горизонтальная проекция точки их пересечения (K_1). По линии связи и условиям принадлежности на фронтальной плоскости проекций находится фронтальная проекция точки пересечения (K_2).

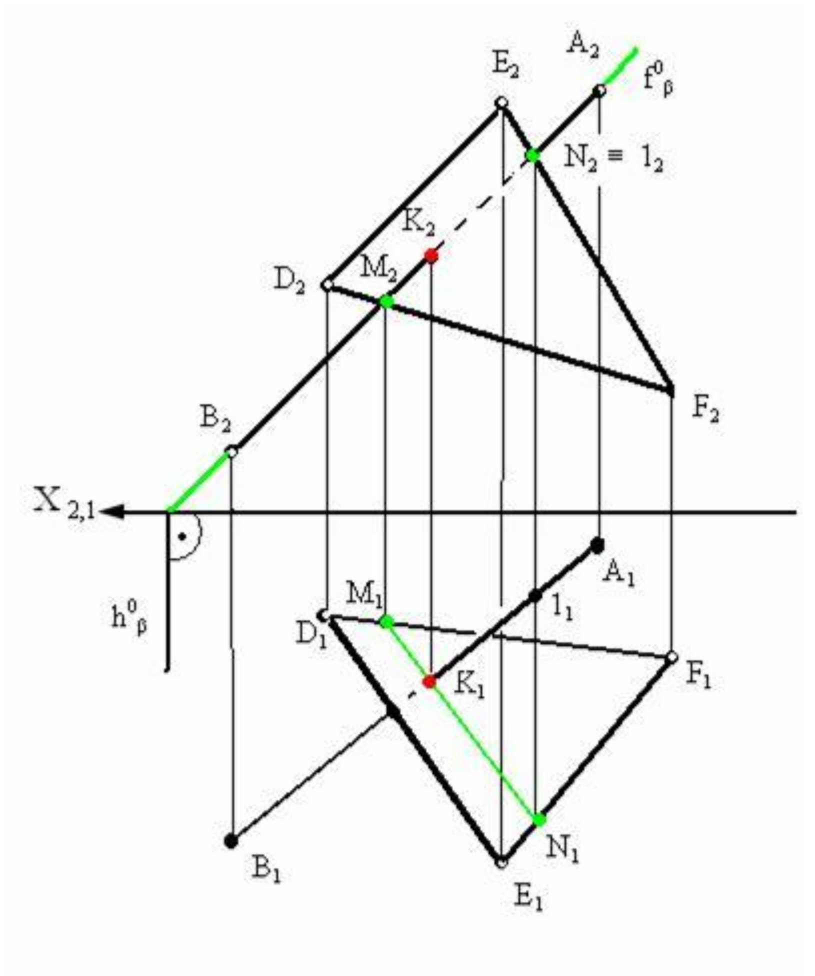


Рис. 3.11. Пример определения точки пересечения прямой и плоскости

Видимость отрезка АВ относительно треугольника DEF определена методом конкурирующих точек.

На плоскости π_2 рассмотрены две точки N $\in$ EF и 1 $\in$ АВ. По горизонтальным проекциям этих точек можно установить, что точка N расположена ближе к наблюдателю ($Y_N > Y_1$), чем точка 1 (направление луча зрения параллельно S). Следовательно, прямая АВ, т. е. часть прямой АВ (K_1) закрыта плоскостью DEF на плоскости π_2 (ее проекция $K_2 1_2$ показана штриховой линии). Аналогично установлена видимость на плоскости π_1.

Вопросы для самоконтроля

1) *В чем заключается сущность метода конкурирующих точек?*
2) *Какие свойства прямой вы знаете?*
3) *Каков алгоритм определения точки пересечения прямой и плоскости?*
4) *Какие задачи называются позиционными?*
5) *Сформулируйте условия принадлежности прямой плоскости.*

4. Перпендикулярность прямых и плоскостей. Метрические задачи.

4.1. Условие перпендикулярности двух прямых на комплексном чертеже

Особый интерес с точки зрения решения задач начертательной геометрии представляют перпендикулярные прямые.

Из классической Евклидовой геометрии известно следующее свойство перпендикулярности двух прямых:

Две прямые перпендикулярны, если угол между ними составляет 90°.

Кроме того, в начертательной геометрии существует еще одно утверждение на эту тему:

Две прямые перпендикулярны, если одна из них линия уровня.

Для подтверждения этого заключения рассмотрим примеры, приведенные на рис. 4.1.

Предположим что необходимо через точку А провести прямую ℓ, пересекающую горизонталь h прямым углом $\ell \perp h$ (рис. 4.1.а).

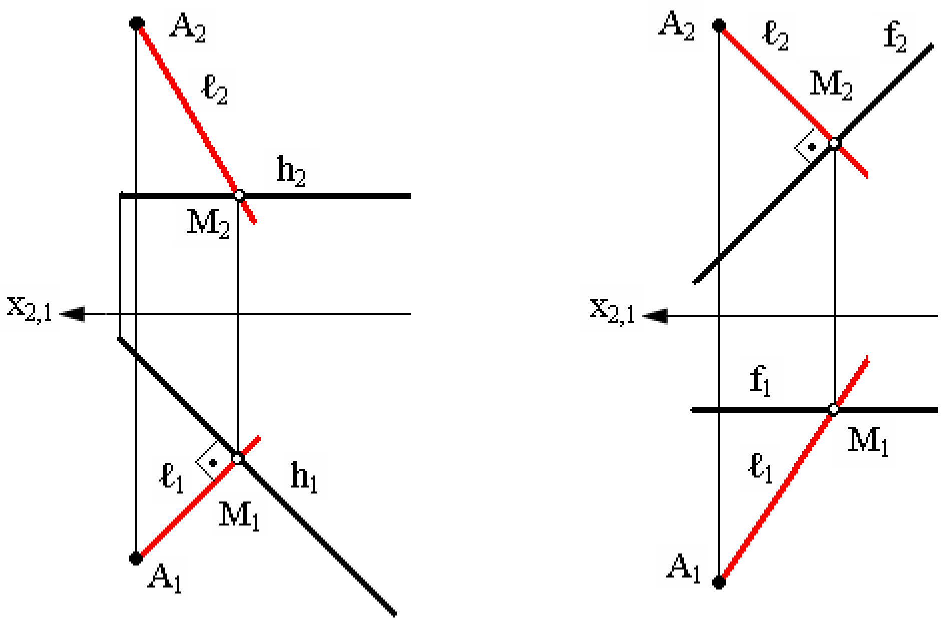
Так как одна из сторон h прямого угла параллельна плоскости π_1, то на эту плоскость прямой угол спроецируется без искажения. Поэтому через горизонтальную проекцию A_1 проведем горизонтальную проекцию искомой прямой ℓ_1 h_1. Отметим горизонтальную проекцию точки пересечения прямой и горизонтали $N_1 = \ell_1 \cap h_1$. Найдем по принадлежности фронтальную проекцию точки пересечения N_2. Точки A_2 и N_2 определяют фронтальную проекцию искомой прямой ℓ. Две проекции прямой определяют ее положение в пространстве.

Если вместо горизонтали будет задана фронталь f, то геометрические построения по проведению прямой $\ell \perp f$ аналогичны рассмотренным с той лишь разницей, что построения неискаженной проекции прямого угла следует начинать с фронтальной проекции (рис. 4.1.б).

4.2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая a перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым b и c этой плоскости.

Если прямые b и c, принадлежащие плоскости α, расположены произвольно относительно плоскостей проекций, то прямые углы между прямой a и прямыми b и c спроецируются на плоскость проекций с искажениями.



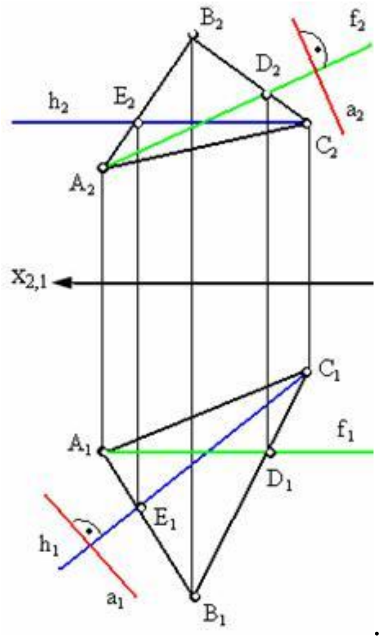
а б

Рис. 4.1. Примеры построения перпендикулярных прямых: а - $\ell \perp h$; б - $\ell \perp f$

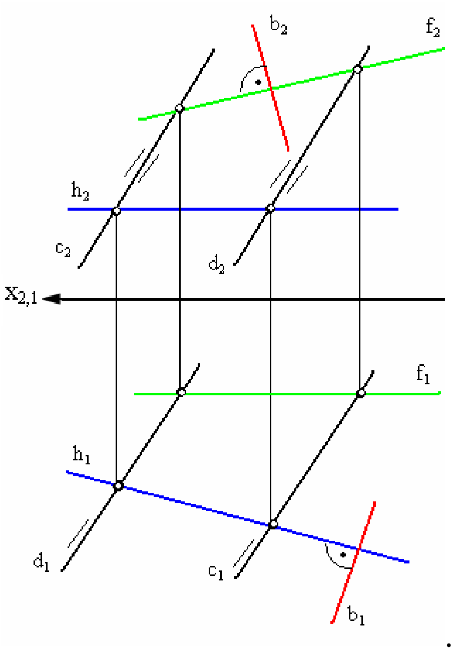
Для того чтобы эти прямые углы спроецировались в натуральную величину, прямые b и c должны быть параллельны плоскостям проекций, т. е. являться соответственно горизонталью и фронталью плоскости α..

Прямая а перпендикулярна плоскости α, если она перпендикулярна пересекающимся горизонтали h и фронтали f этой плоскости.
При этом прямые углы между прямой а и прямыми h и f на соответствующие плоскости проекций спроецируются без искажений.

Кроме вышесказанного существует теорема:
Для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция − к фронтальной проекции фронтали этой плоскости.



а



б

Рис. 4.2. Изображение прямых, перпендикулярных к плоскостям заданным: а - плоскостью фигуры АВС; б - прямыми c, d

Следовательно, прямая *а перпендикулярна плоскости α, если ее проекции перпендикулярны соответствующим проекциям горизонтали h и фронтали f этой плоскости.*

На рис. 4.2 изображены прямые, перпендикулярные плоскостям, заданным различными способами.

Если плоскость задана следами, то горизонталью и фронталью плоскости являются ее пересекающиеся следы.

Следовательно, прямая а перпендикулярна плоскости α, если ее проекции перпендикулярны соответствующим пересекающимся следам плоскости (рис. 4.3).

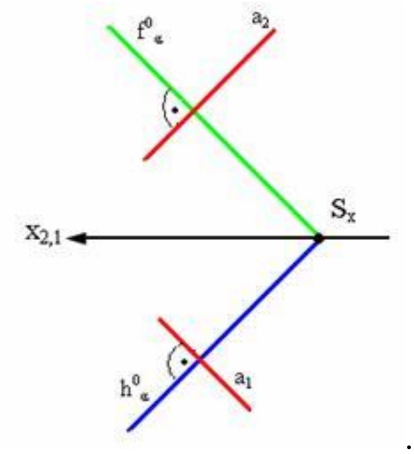


Рис.4.3. Изображение прямой а перпендикулярной к плоскости, заданной следами

4.3. Условие перпендикулярности двух плоскостей

Плоскости α и β перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр другой плоскости.

На рис. 4.3 показана прямая а перпендикулярная плоскости α , (следовательно, любая плоскость, проходящая через прямую а, будет перпендикулярна плоскости α). На рис. 4.4 изображены две проецирующие плоскости β и γ и произвольная плоскость δ, следы которой проходят через следы прямой а.

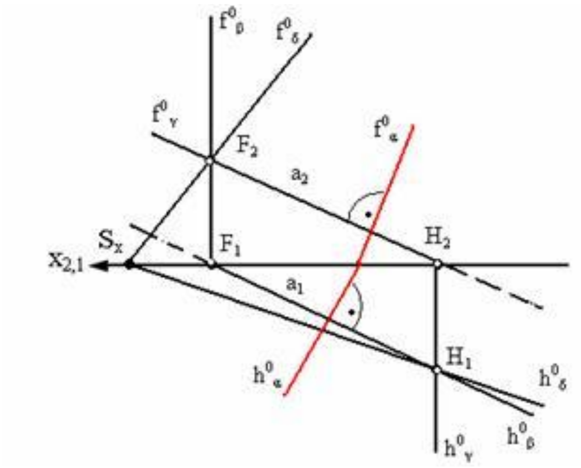


Рис. 4.4. Условие перпендикулярности плоскостей

На рис. 4.5 изображена прямая b, перпендикулярная плоскости Δ ABC, следовательно, любая плоскость, проходящая через прямую b, будет перпендикулярна плоскости Δ ABC.

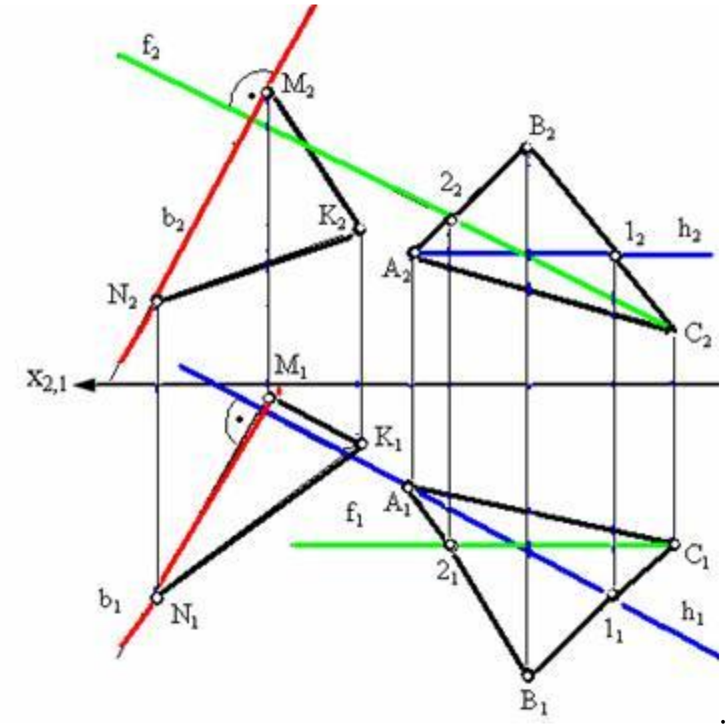


Рис. 4.5. Условие перпендикулярности плоскостей

4.4. Определение длины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций

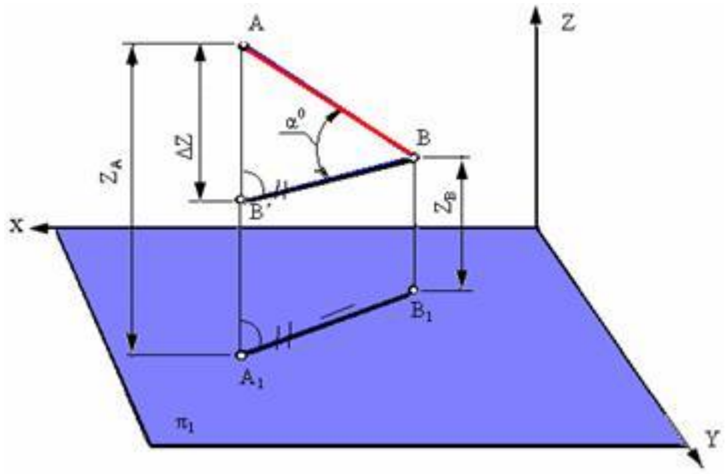


Рис. 4.6. Определение углов наклона и натуральной величины отрезков

На рис. 4.6 показаны в аксонометрической проекции отрезок AB и его горизонтальная проекция A_1B_1. Проведя прямую BB', параллельную горизонтальной проекции отрезка A_1B_1 , получим прямоугольный треугольник Δ ABB'.

Длина отрезка AB равна гипотенузе этого треугольника, катетами которого являются горизонтальная проекция отрезка A_1B_1 и разность координат z точек A и B ($\Delta z = z_A - z_B$).

Как известно, угол наклона прямой к плоскости равен углу между этой прямой AB и ее проекцией на плоскость (A_1B_1).

Следовательно, угол Δ ABB', лежащий против катета Δz, равен углу наклона отрезка AB и горизонтальной плоскости проекций π_1 (угол α°).

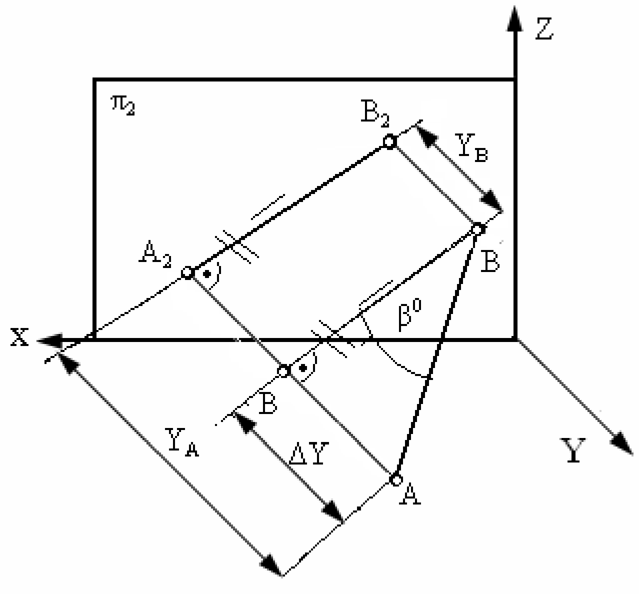


Рис. 4.7. Определение углов наклона и натуральной величины отрезка

Аналогично рассуждая (рис. 4.7), можно показать, что длина отрезка АВ равна гипотенузе треугольника, катетами которого являются фронтальная проекция отрезка A_2B_2 и разность координат Y точек А и В ($\Delta Y = Y_A - Y_B$).

Угол этого треугольника, лежащий против катета ΔY, равен углу наклона отрезка АВ к фронтальной плоскости проекций π_2 (угол $\beta°$).

По аналогии длина отрезка АВ может быть определена и как гипотенуза треугольника, катеты которого профильная проекция отрезка A_3B_3 и разность координат X ($\Delta X = X_A - X_B$) точек А и В. Угол $\gamma°$ этого треугольника, лежащий против катета ΔX, определяет угол наклона отрезка АВ к профильной плоскости проекций π_3.

На рис. 4.8 показан пример определения длины отрезка АВ и углов наклона его к плоскостям проекций.

4.5. Линия наибольшего наклона (ската)

Линией наибольшего ската плоскости γ называется прямая g, принадлежащая этой плоскости и перпендикулярная ее линиям уровня: горизонтали h и фронтали f (рис.4.9).

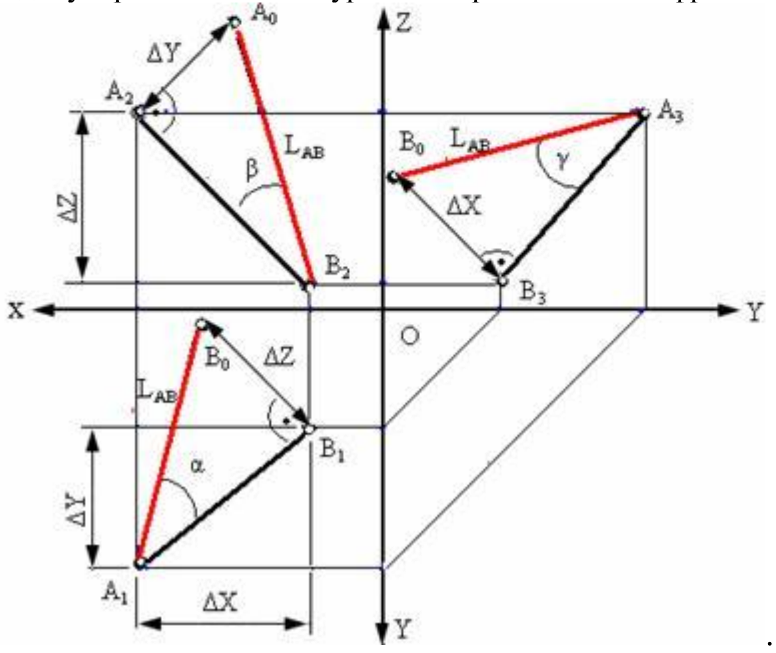


Рис. 4.8. Определение длины отрезка и углов наклона к плоскостям проекций

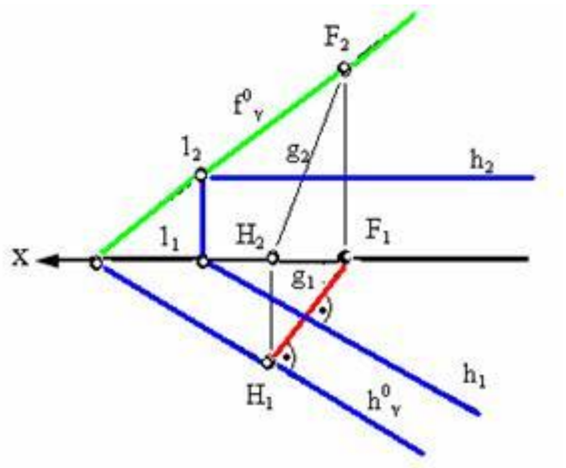


Рис. 4.9. Пример построения линии наибольшего наклона

На комплексном чертеже горизонтальная проекция линии наибольшего наклона перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали этой плоскости, а фронтальная − фронтальной проекции фронтали.

Главным свойством этой линии наибольшего ската является то, что она образует с горизонтальной плоскостью проекций π_1 угол α°, равный углу наклона плоскости γ к плоскости π_1.

Это свойство линии наибольшего наклона (ската) используется для определения углов наклона плоскостей к плоскостям проекций.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите условия перпендикулярности прямых линий на комплексном чертеже.

2. Назовите условия перпендикулярности прямой к плоскости на комплексном чертеже.

3. Какова сущность способа прямоугольного треугольника?

4. Какое свойство линии наибольшего наклона является основным?

5. Как можно определить действительную величину отрезка, находящегося в общем положении по отношению к плоскостям проекций?

6. Как определяется угол наклона плоскости к плоскостям проекций?

5. Способы преобразования комплексного чертежа

5.1. Необходимость преобразований комплексного чертежа

Трудоемкость и, как следствие, точность графического решения задач часто зависят не только от сложности задач, но и от того, какое положение занимают геометрические фигуры, входящие в условие задачи, по отношению к плоскостям проекций.

Проецируемая фигура может занимать по отношению к плоскостям проекций произвольное, или частное положение.

В первом случае, как правило, получаются проекции, неудобные для решения задач. Решение задачи значительно упрощается, когда мы имеем дело с частным расположением геометрических фигур относительно плоскостей проекций. Наиболее выгодным частным положением проецируемой фигуры при ортогональном проецировании следует считать:

1) положение, перпендикулярное к плоскости проекций – при решении позиционных задач;

2) положение, параллельное плоскости проекций – для решения метрических задач.

Таким образом, при решении той или иной задачи бывает целесообразно привести фигуру к частному положению.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному можно осуществлять изменением взаимного положения проецируемой фигуры и плоскости проекции. При ортогональном проецировании это может быть достигнуто двумя путями:

1) перемещением в пространстве проецируемой фигуры, по отношению к плоскости проекций.

2) выбором новой плоскости проекций, по отношению к проецируемой фигуре.

Первый путь лежит в основе плоскопараллельного перемещения; второй – составляет теоретическую базу способа замены плоскостей проекций.

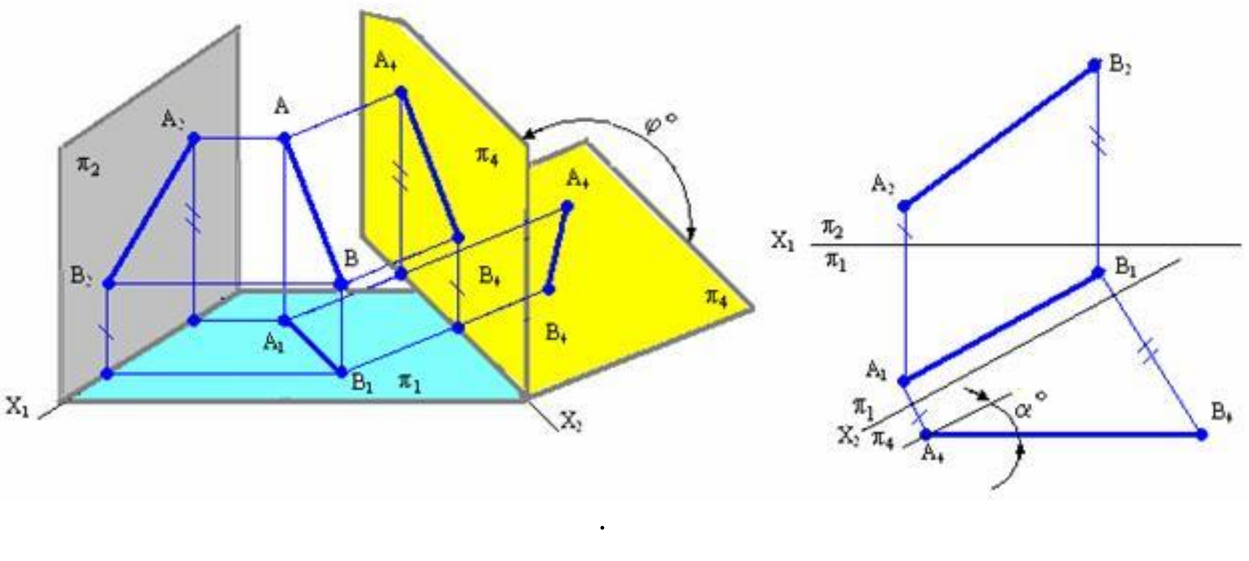
5.2. Задачи преобразований комплексного чертежа

Все метрические и позиционные задачи можно свести к одной из следующих четырех задач.

Задача №1. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы прямая общего положения АВ оказалась параллельной одной из плоскостей проекций т.е. прямой уровня (горизонталь или фронталь) новой системы.*

Для решения задачи необходимо заменить плоскость проекций Π_1, или Π_2 новой плоскостью проекций Π_4, параллельной прямой АВ и перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций. Для того чтобы прямая АВ в новой системе плоскостей проекций стала, например, фронталью, нужно заменить фронтальную плоскость проекций Π_2 новой плоскостью $\Pi_4 \perp \Pi_1$ и параллельной прямой АВ.

Рассмотрим подробно этапы построения на комплексном чертеже (рис. 5.1), необходимые для решения первой основной задачи на преобразование комплексного чертежа:



а б

Рис. 5.1. Изображение преобразования прямой общего положения в прямую положения уровня: а - в пространстве; б – на комплексном чертеже

1) провести новую ось проекций x_{14} параллельно A_1B_1 на произвольном расстоянии от нее; такое положение оси x_{14} обусловливается тем, что Π_4 параллельна АВ. В частном случае, если плоскость Π_4 проведена непосредственно через прямую АВ, ось $x_{14} = A_1B_1$;

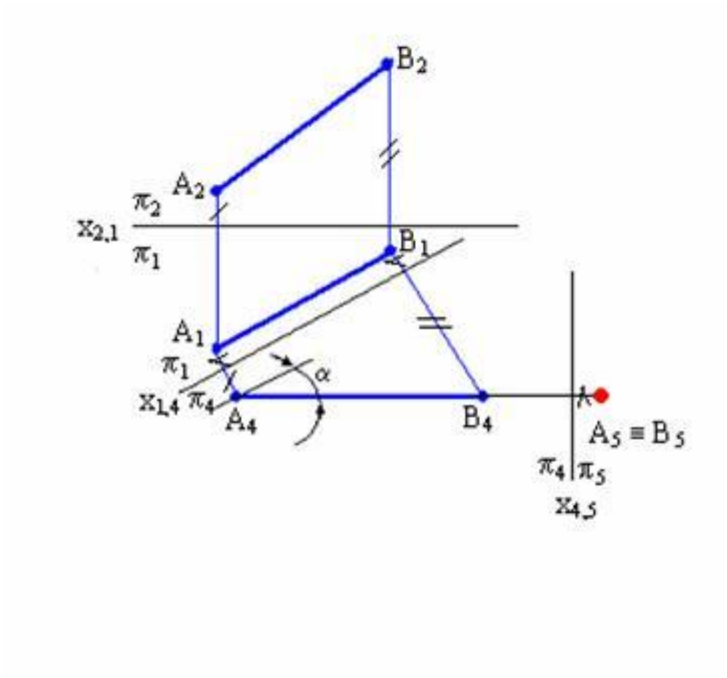
2) выбрать на прямой две точки $A(A_1A_2)$ и $B(B_1B_2)$;

3) построить проекции точек А и В на плоскости Π_4.

Прямая A_4B_4 является проекцией прямой АВ на плоскость Π_4. Прямая АВ в новой системе плоскостей проекций Π_1/Π_4 является фронталью.

Отрезок [AB] прямой проецируется на плоскость $П_4$ в истинную величину, т.е. | A_4B_4 | = | AB |, a- величина угла наклона прямой AB к плоскости $П_1$.

Задача 2. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы линия общего положения АВ стала проецирующей.*



.

Рис. 5.2 Преобразование прямой АВ общего положения в горизонтально-проецирующую.

Для решения задачи заменить плоскость $П_2$ исходной системы $П_2/П_1$ плоскостью $П_4$ // A_1B_1, при этом плоскость $П_4$ будет перпендикулярной $П_1$ так как АВ // $П_4$ и образует с ней новую систему плоскостей проекций $П_1/П_4$.

Построения на комплексном чертеже:

1) провести новую ось проекций x_{14} // A_1B_1;

2) построить проекции точек А и В на плоскости $П_4$, взяв координаты точек из плоскости $П_2$;

3) заменить плоскость $П_1$ на новую $П_5$, которая будет $П_4$ и A_4B_4. Для этого нужно провести новую ось проекций $x_{4,5}$.

Так как расстояния точек А и В до плоскости $П_4$ одинаковы, то проекции их на плоскости $П_5$ совпадут, $A_5 \equiv B_5$, прямая AB (A_5B_5) в новой системе плоскостей проекций заняла проецирующее положение и стала горизонтально проецирующей. Прямую общего положения преобразовать в проецирующую заменой только одной плоскости проекций нельзя, так как плоскость $П_5$ перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни одной из «старых» плоскостей проекций, и, следовательно, не сможет образовать ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Прямую общего положения следует преобразовать в линию уровня, а затем линию уровня преобразовать в проецирующую (рис. 5.2).

Задача №3. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей (рис. 5.3).*

Для решения задачи необходимо заменить плоскость $П_1$ или $П_2$ исходной системы $П_2/П_1$ новой плоскостью $П_4$, перпендикулярной плоскости Σ (АВС). Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Следовательно, если какую-либо прямую, принадлежащую плоскости

Σ, преобразовать в проецирующую, то плоскость **Σ**в новой системе плоскостей проекций станет проецирующей.

Проще всего для этой цели воспользоваться линией уровня.

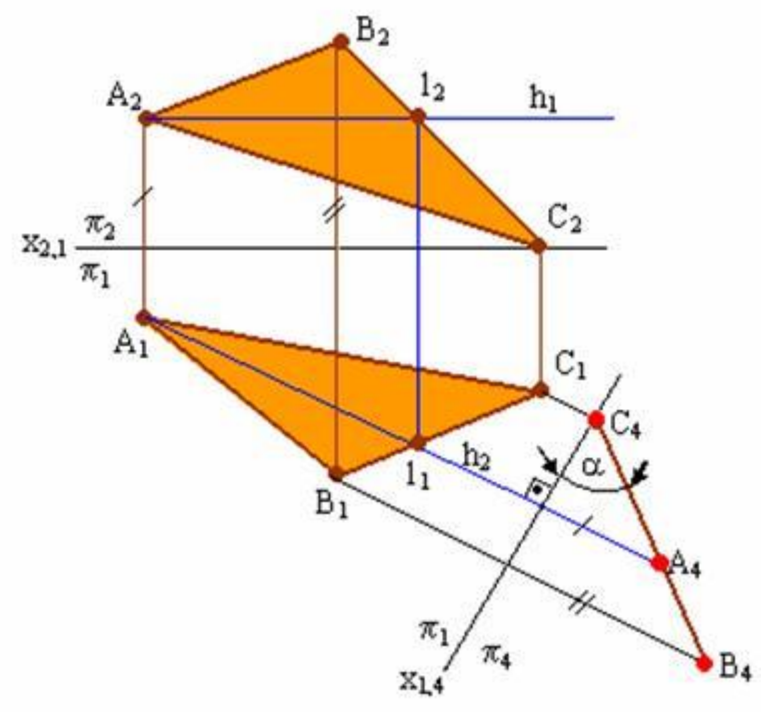


Рис. 5.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую

На чертеже плоскость **Σ**(ABC) преобразована во фронтально проецирующую (см. рис. 5.3) путем преобразования горизонтали $h(h_1,h_2)$, принадлежащей плоскости , во фронтально- проецирующую прямую. В новой системе плоскостей проекций Π_1/Π_4 плоскость **Σ**является фронтально проецирующей (**Σ**⊥4), и поэтому ее проекция на Π_4 вырождается в прямую линию**Σ** $_4$ (C_4, A_4, B_4).

α – величина угла наклона плоскости **Σ** к плоскости Π_1.

Задача №4. *Преобразовать комплексный чертеж так, чтобы плоскость общего положения стала плоскостью уровня (параллельной одной из плоскостей проекций) новой системы.*

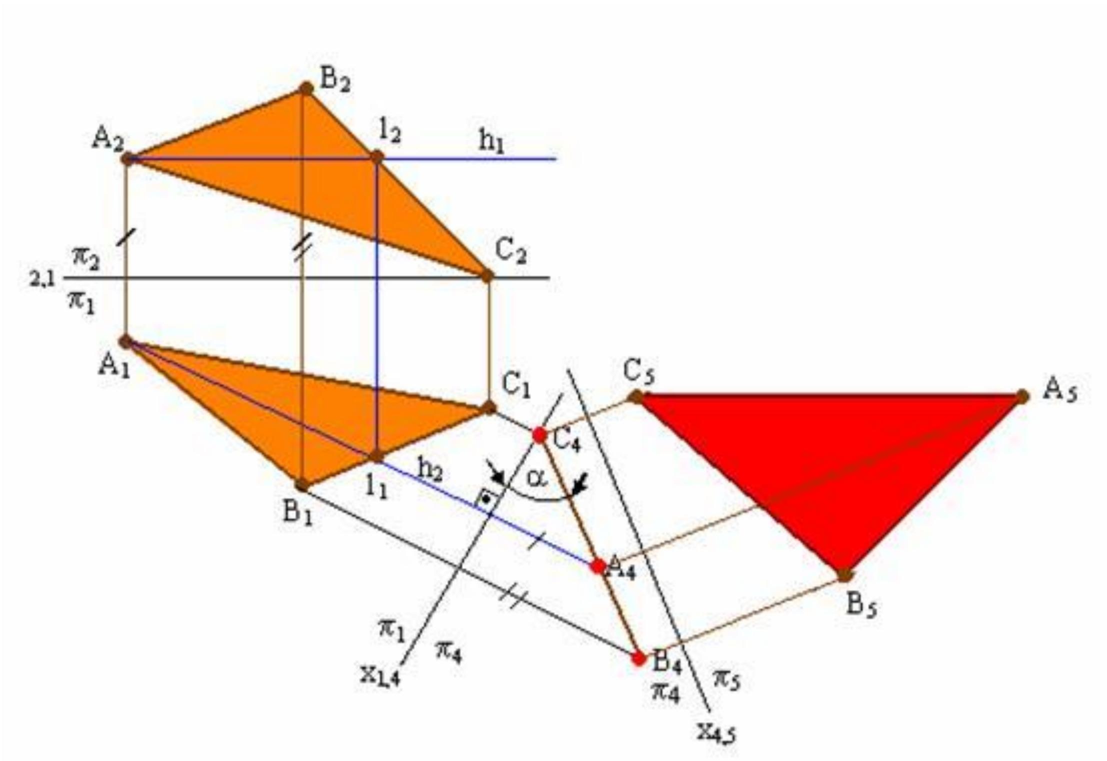


Рис. 5.4. Решение 4-й задачи на преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня

Плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня заменой только одной плоскости проекций нельзя, так как плоскость $П_4$, параллельная ей, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций и, следовательно, не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Вначале плоскость необходимо преобразовать в проецирующую, т. е. решить задачу 3 на преобразование комплексного чертежа, а затем проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня. На рис. 5.4 показано преобразование плоскости $\Delta(ABC)$ в горизонтальную плоскость уровня.

Допустим, что заданная плоскость Г является фронтально проецирующей (рис. 5.5). Заменим плоскость $П_1$ новой плоскостью проекций $П_4$, параллельной плоскости Г (ΔABC) и, перпендикулярной незаменяемой плоскости $П_2$. В новой системе плоскостей проекций $П_2/П_4$ плоскость Г (ABC) станет горизонтальной плоскостью уровня.

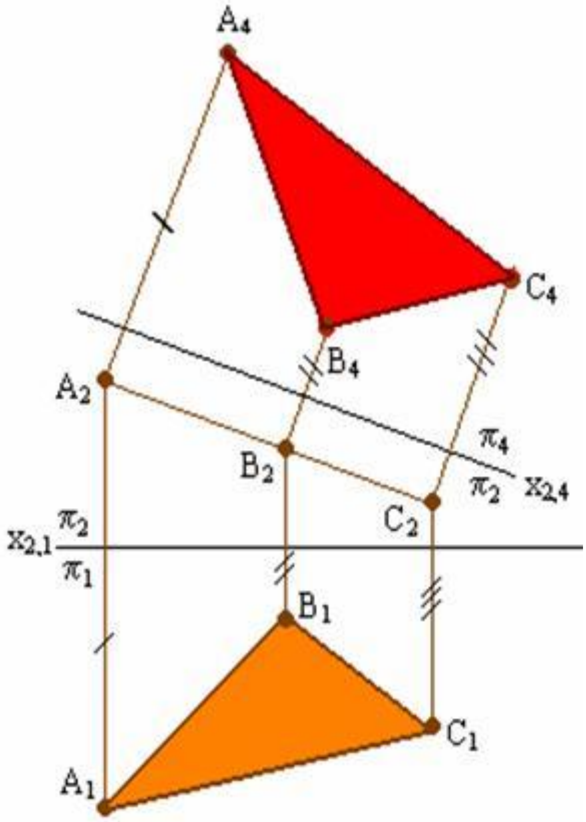


Рис. 5.5. Решение четвертой задачи на преобразование комплексного чертежа

Построения на комплексном чертеже:

1) проводим новую ось проекций x_{24} параллельно A_2C_2 на произвольном от нее расстоянии; такое положение оси проекций x_{24} обусловливается тем, что $П_4$ параллельна Г (ABC). Ось x_{24} совпадает с прямой (A_2C_2), если плос- кость $П_4$ совмещается с плоскостью Г (ABC);

2) построим проекции точек А, В и С на плоскость $П_4$;

3) треугольник $A_4B_4C_4$ является проекцией треугольника ABC на плоскость $П_4$.

Примечание. Так как плоскость треугольника ABC параллельна $П_4$, значит отображение этого треугольника на $П_4$ будет в натуральную величину.

В данном конспекте лекций рассматривается только способ замены плоскостей проекций.

Вопросы для самоконтроля

1. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы прямую общего положения преобразовать в: а) прямую уровня; б) проецирующую прямую.

2. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы плоскость общего положения преобразовать в: а) проецирующую; б) плоскость уровня?

3. Какие основные метрические задачи можно решать с помощью дополнительного проецирования?

4. Какие метрические задачи относят к основным?

6. Метрические задачи

6.1. Общие положения

Метрическими называются задачи, связанные с измерением расстояний и углов. В них определяются действительные величины и форма геометрических фигур, расстояния между ними и другие характеристики по их метрически искаженным проекциям. Решение метрических задач основано на том, что геометрическая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на нее в конгруэнтную ей фигуру (см. аксиомы параллельного проецирования). Поэтому при решении метрических задач широко используются способы преобразования комплексного чертежа.

Рассмотрим три группы метрических задач. К первой относятся задачи, в которых требуется найти расстояние между двумя геометрическими фигурами; ко второй - задачи на определение действительных величин плоских фигур и углов; к третьей группе принадлежат задачи, связанные с построением в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам.

6.2. Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами

Искомое расстояние во всех задачах этой группы измеряется длиной отрезка, заключенного между заданными геометрическими фигурами и перпендикулярного к одной из них или одновременно к обеим. Этот отрезок проецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, которая будет перпендикулярна одной или обеим геометрическим фигурам, между которыми определяется расстояние. Алгоритм решения задач этой группы будет следующим:

1. Одним из способов преобразования комплексного чертежа привести обе заданные геометрические фигуры (или одну из них) в положение, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций.
2. Построить проекцию искомого отрезка на эту плоскость.

Выбирая способ преобразования комплексного чертежа при составлении алгоритма, следует учитывать требования к компактности чертежа, четкость и возможную простоту графических операций.

Задача 1 . *Определение расстояния от точки М до прямой АВ общего положения (рис. 6.1).* Искомое расстояние измеряется длиной отрезка /MN/ перпендикуляра, опущенного из точки М на прямую АВ. Отрезок [MN] спроецируется в конгруэнтный ему отрезок на плоскость проекций, перпендикулярную прямой АВ. Составляем алгоритм решения:

1. Преобразовать прямую АВ в проецирующую прямую способом замены плоскостей проекций.
2. Построить проекцию отрезка [MN] на плоскость $П_5 \perp AB$, длина которого M_5N_5 определяет искомое расстояние.

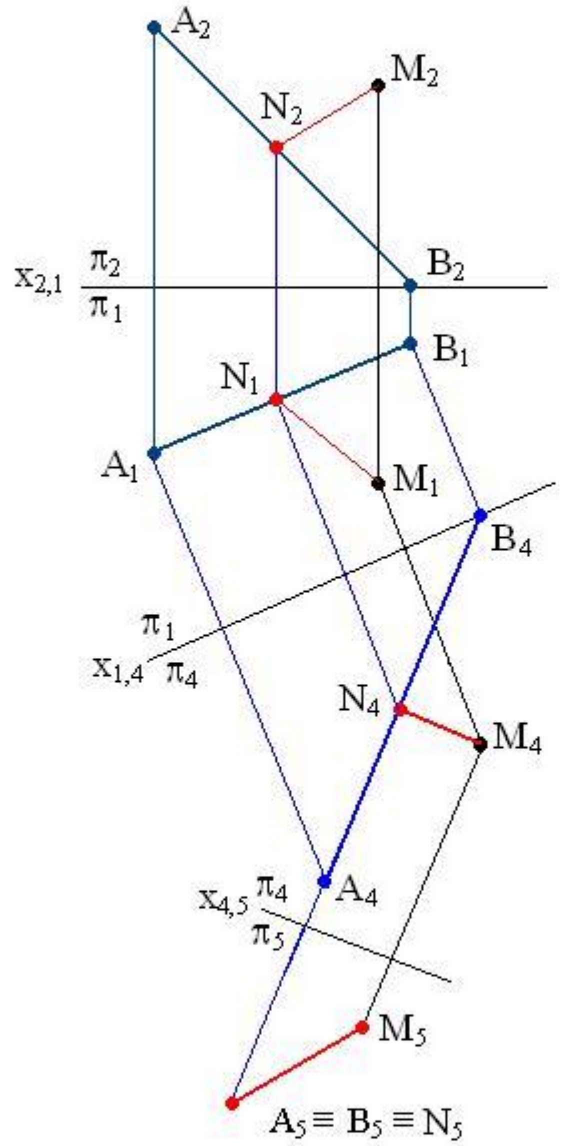


Рис. 6.1. Определение расстояния от точки до прямой

Построение. Для преобразования прямой АВ общего положения в проецирующую выполнены две последовательные замены плоскостей проекций: вначале прямая АВ преобразована в линию уровня, затем линия уровня преобразована в проецирующую прямую. Построены проекций M_4 и M_5 точки М в системе $П_4/П_5$.

Отрезок $[M_5N_5]$ является искомым: $[M_5N_5] \cong [MN]$ и $/M_5N_5/ = /MN/$. На рис. 6.1 показано построение проекций $[M_4N_4]$, $[M_1N_1]$ и $[M_2M_2]$ отрезка [MN] обратным преобразованием.

Задача 2. *Определить расстояние между параллельными прямыми a и b*.

Для решения задачи необходимо выполнить две замены плоскостей проекций. Вначале прямые a и b необходимо сделать прямыми уровня. Для этого $П_4$ необходимо расположить параллельно a_1 и $b_{1.}$ Затем названные прямые необходимо расположить перпендикулярно $П_{5.}$ Расстояние между a_5 и b_5 будет натуральной величиной между параллельными прямыми a и b (рис. 6.2).

Задача 3. *Определение расстояния от точки до плоскости*.

Решение задачи приведено на рис. 6.3.

Для определения расстояния от точки М до плоскости треугольника Δ ABC необходимо плоскость треугольника общего положения ΔABC преобразовать в плоскость проецирующую. Для этого нужно произвести замену плоскости проекций $П_2$ на $П_4$ перпендикулярно h_1.

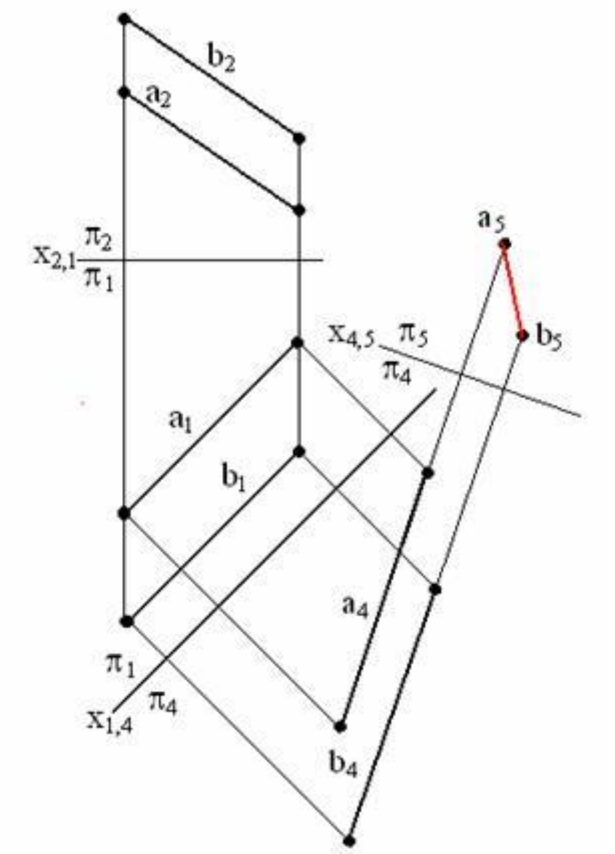


Рис. 6.2. Определение расстояния между параллельными прямыми

Плоскость ΔABC преобразуется в линию $C_4A_4B_4$. На эту же плоскость $П_4$ спроецируется точка М (M_4). Перпендикуляр из M_4 на линию $C_4A_4B_4$ будет натуральной величиной расстояния от точки М до плоскости Δ ABC. Проекции перпендикуляра переносятся в плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ по соответствующим линиям связи, расстояния от точки М до плоскости Δ ABC. Проекции перпендикуляра переносятся в плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ по соответствующим линиям связи.

Примечания: 1) Проекция перпендикуляра M_1N_1 в $П_1$ располагается параллельно $П_4$, потому что в плоскости $П_4$ имеется ее натуральная величина.

2) Задачи 1- 3 можно также решать по следующей схеме: вначале определить метрически искаженные проекции искомого отрезка, а затем способом прямоугольного треугольника определить его действительную величину.

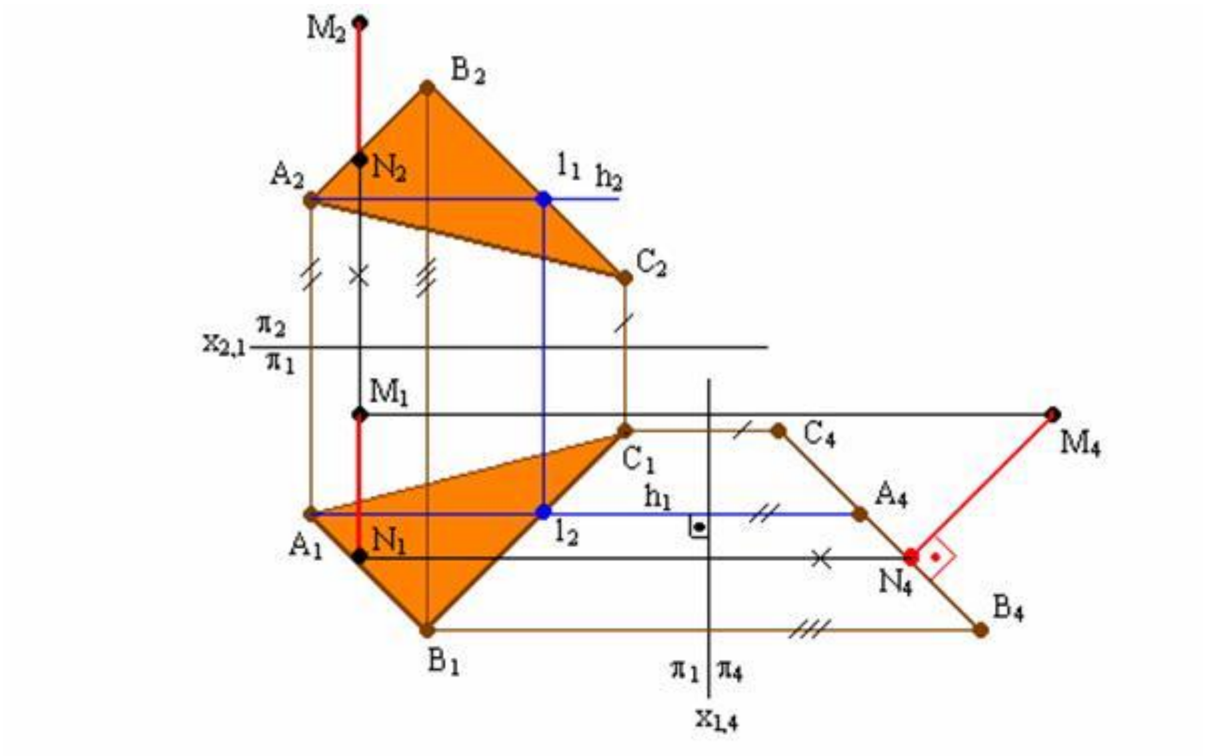


Рис. 6.3. Определение расстояния от точки до плоскости

6.3. Задачи на определение действительных величин плоских геометрических фигур и углов между ними

Общей схемой решения задач этой группы является приведение заданной плоской фигуры или плоскости угла в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. При выборе способа преобразования комплексного чертежа следует стремиться к простоте графических операций, их четкости и наименьшему количеству. Наиболее часто при решении задач применяются способы замены плоскостей проекций и вращения вокруг линии уровня. Способ вращения вокруг линии уровня является наиболее целесообразным для решения большинства задач данной группы, так как дает решение путем одного преобразования комплексного чертежа. К задачам данной группы можно отнести:

Задача 1. Определение действительной величины плоской фигуры. Решение задачи дано на рис. 5.4, 5.5, лекции 5. Задача решается аналогично задаче 1.

Задача 2. Определение угла, образованного двумя пересекающимися прямыми.

Задача 3. Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее прямоугольной проекцией на данную плоскость. Решение задачи приведено на рис. 6.4.

Для определения угла между прямой AB и плоскостью $\sum (a \parallel b)$ необходимо:

1. Определить направление горизонтальной проекции горизонтали h_1 и фронтальной проекции фронтали плоскости $\sum (a \parallel b)$.

2. Из произвольной точки M, принадлежащей прямой AB ($M \in AB$) провести прямую $M_2 5_2 \perp f_2$ и $M_1 5_1 \perp h_1$.

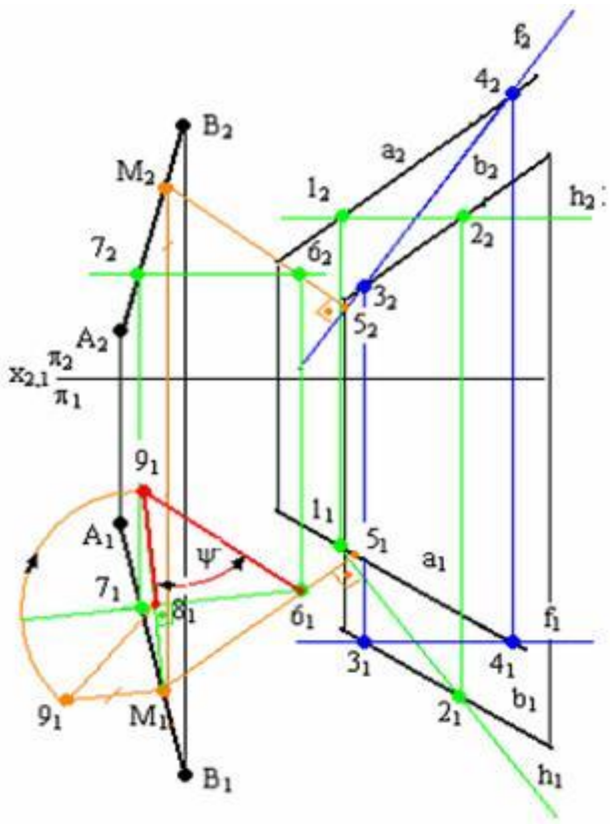


Рис. 6.4. Определение величины угла, образованного прямой и плоскостью.

3. Определить величину угла у вращением его вокруг горизонтали до положения, параллельного плоскости $П_1$.
4. Вычислить значение искомого угла $\varphi = 90^0 - \Psi^0$

Задача 4. Определение величины угла между двумя пересекающимися плоскостями.

Мерой угла между двумя плоскостями служит линейный угол, образованный двумя прямыми – сечениями граней этого угла плоскостью, перпендикулярной к их ребру.

В задаче необходимо линию пересечения АВ плоскостей ∑ и Г преобразовать в прямую уровня, а затем в линию проецирующую.

Общей схемой решения задач на построение в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам является:

1) преобразование заданной плоскости общего положения в плоскость уровня;
2) решение в плоскости уровня заданной метрической задачи.

Вопросы для самоконтроля

1. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы прямую общего положения преобразовать в: а) прямую уровня; б) проецирующую прямую.

2. Как нужно располагать дополнительные плоскости проекций, чтобы плоскость общего положения преобразовать в: а) проецирующую; б) плоскость уровня?

3. Какие основные метрические задачи можно решать с помощью дополнительного проецирования?

4. Какие метрические задачи относят к основным?

7. Поверхности

7.1. Понятия и определения

В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно рассматривать поверхность как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Образование поверхности с помощью линии позволяет дать иное определение поверхности, базирующейся на таких основных элементарных геометрических понятиях, как точка и множество. В свою очередь, линия определяется как непрерывное однопараметрическое множество точек, поэтому можно дать следующее определение поверхности:

Поверхностью называется непрерывное двупараметрическое множество точек.

Для получения наглядного изображения поверхности на чертеже закон перемещения линии целесообразно задавать графически в виде совокупности линий и указаний о характере перемещения линии. Эти указания могут быть заданы графически, в частности с помощью направляющей поверхности. В процессе образования поверхностей линия может оставаться неизменной или менять свою форму. Такой способ образования поверхности называется кинематическим, а сама поверхность − кинематической. Закон перемещения образующей линии, как правило, задается при помощи направляющих линий и алгоритма перемещения образующей по направляющим.

На чертеже кинематическая кривая поверхность задается при помощи ее определителя. *Определителем поверхности называют совокупность условий, необходимых и достаточных для задания поверхности в пространстве.*

Подвижная линия называется *образующей*, неподвижные линии и поверхность – *направляющими*.

Примером такого способа образования могут служить все технологические процессы обработки металлов режущей кромкой, когда поверхность изделия несет на себе «отпечаток» профиля резца.

Режущие кромки являются неотъемлемой частью исполнительных механизмов многих строительных и дорожных машин, применяемых не только для разработки и перемещения грунта (бульдозеры, грейдеры и т. п.), но и рытье траншей, котлованов, проходка траншей, профилирование откосов и многое другое.

Но режущие кромки во многих случаях начинают уступать место производящей поверхности, с которой связано развитие прогрессивных производительных процессов обработки металлов давлением и обкаткой. Геометрическая сущность этих процессов – метод огибания.

Рассмотрим некоторые кривые поверхности.

Кривые поверхности широко применяются в различных областях науки и техники при создании очертаний различных технических форм или как объекты инженерных исследований. Существуют три способа задания кривых поверхностей:

1. Аналитический - при помощи уравнений;

2. При помощи каркаса;

3. Кинематический, т. е. перемещением линий в пространстве.

Рис. 7.1. Пример поверхности, заданной аналитически

Составлением уравнений поверхностей занимается аналитическая геометрия; она рассматривает кривую поверхность как множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению. На рис. 7.1 приведен пример поверхности, заданной аналитически (системой алгебраических уравнений).

При каркасном способе задания кривая поверхность задается совокупностью некоторого количества линий, принадлежащих поверхности.

Каркас поверхности

Другим способом образования поверхности и ее изображения на чертеже может служить каркас поверхности.

Каркасом поверхности принято называть упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности.

В зависимости от того, чем задается каркас поверхности, точками или линиями, каркасы называют точечными или линейными. Линейным каркасом называется множество таких линий, которые имеют единый закон образования и связаны между собой определенной зависимостью. Условия связи между линиями каркаса называются зависимостью каркаса. Эта зависимость характеризуется некоторой изменяющейся величиной, которая называется параметром каркаса. Если параметр линейного каркаса является непрерывной функцией, то каркас называется непрерывным, а если параметр − прерывная функция, то каркас называется дискретным.

На рис. 7.2 приведен пример каркаса поверхности, состоящей из двух ортогонально расположенных семейств линий a_1, a_2, a_3,…, a_n, b_1, b_2, b_3,…b_n.

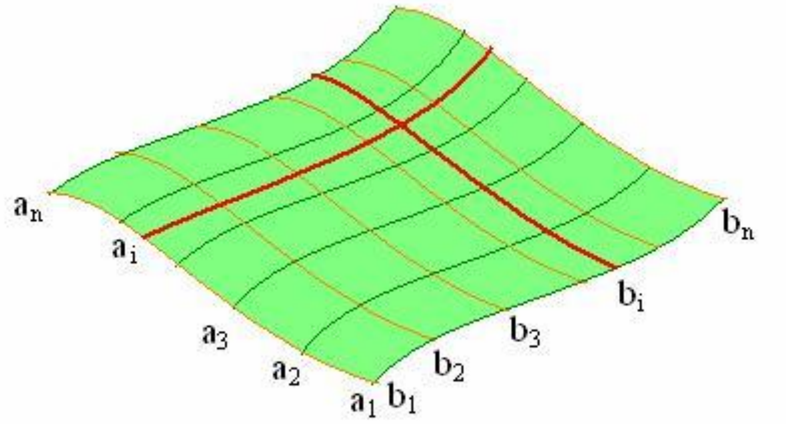


Рис. 7.2. Пример линейного каркаса поверхности

Определитель поверхности

Кинематический способ образования поверхности можно представить как множество положений движущейся линии или поверхности.

Этот способ дает возможность сформулировать понятие определителя поверхности. Под этим понятием обычно подразумевают необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и кинематических связей между ними, которые однозначно определяют поверхность.

Определитель поверхности состоит из двух частей:

Геометрической части - совокупности геометрических фигур, с помощью которых можно образовать поверхность.

Алгоритмической части - алгоритма формирования поверхности при помощи фигур, входящих в геометрическую часть определителя.

Чтобы найти определитель поверхности, следует исходить из кинематического способа образования поверхности.

Для того чтобы построить чертеж поверхности, необходимо предварительно выявить ее определитель. Определитель поверхности выявляется путем анализа способов образования поверхности или ее основных свойств. В общем случае поверхность может быть образована несколькими способами и поэтому может иметь несколько определителей. Обычно из всех способов образования поверхности выбирают простейший.

Поверхность на чертеже задают проекциями геометрической части ее определителя. Определитель кривой поверхности Ф может быть записан в символической форме: Ф(Г)[А], где (Г) - геометрическая часть, [А] - алгоритмическая часть. Для каждой поверхности обе части определителя имеют вполне конкретное содержание.

Поверхность считается заданной на комплексном чертеже, если относительно любой точки пространства, заданной на чертеже, можно однозначно решить вопрос о принадлежности ее данной поверхности. Построение проекций любых точек и линий, принадлежащих поверхности, а также второй их проекции, если одна задана, выполняется на основании ее определителя.

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности.

Рассмотрим примеры выявления определителя для некоторых простейших поверхностей:

Через три точки A, B, C, не принадлежащие одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость (Σ на рис. 7.3, а). Точки A, B и C составляют геометрическую часть определителя плоскости.

Вторая часть определителя, т. е. алгоритм построения в плоскости Σ(A, B, C) любых линий и точек, выражается рассмотренными ранее условиями принадлежности прямой и точки плоскости.

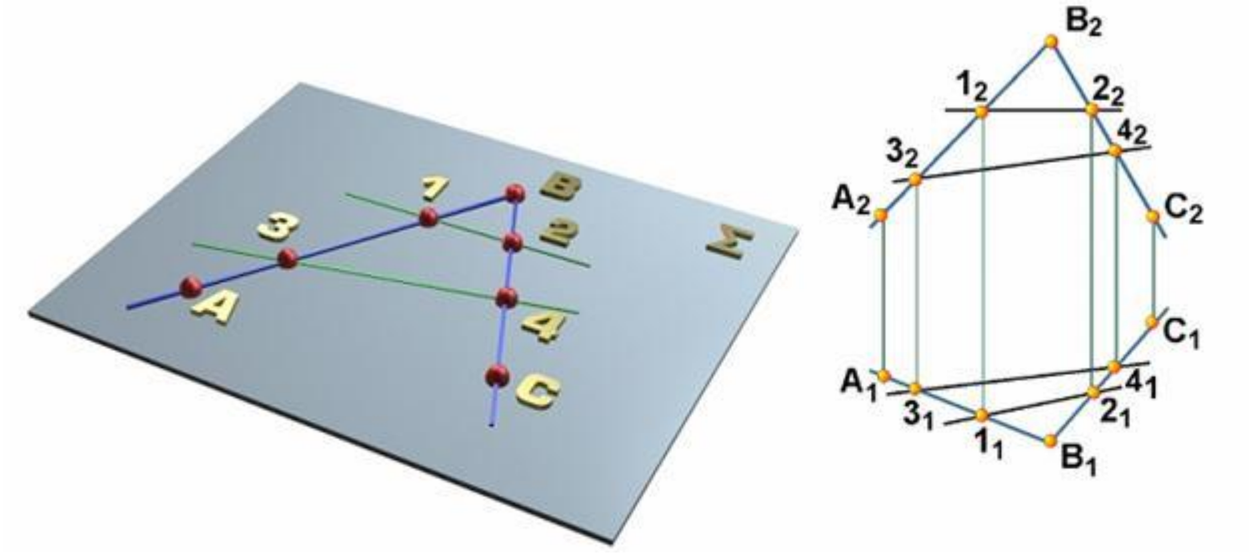
На чертеже (рис. 7.3, б) плоскость Σ задана проекциями геометрической части своего определителя: $A(A_1A_2)$, $B(B_1B_2)$, $C(C_1C_2)$.

Цилиндрическая поверхность вращения может быть образована вращением прямой $l \parallel i$ вокруг оси i (рис. 7.4, а).

Геометрическая часть определителя поверхности состоит из образующей l и оси i. Алгоритмическая часть определителя состоит из операции вращения образующей линии l вокруг оси i.

Определитель цилиндрической поверхности вращения имеет вид $Ф(l \parallel i,\ i)$ [А]. На чертеже (рис. 7.4, б) цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя.

Коническая поверхность вращения может быть образована вращением прямой l, пересекающей ось вращения i под некоторым углом (рис. 7.5, а). Алгоритмическая часть определителя состоит из словесного указания о том, что поверхность образуется вращением образующей l вокруг оси i.



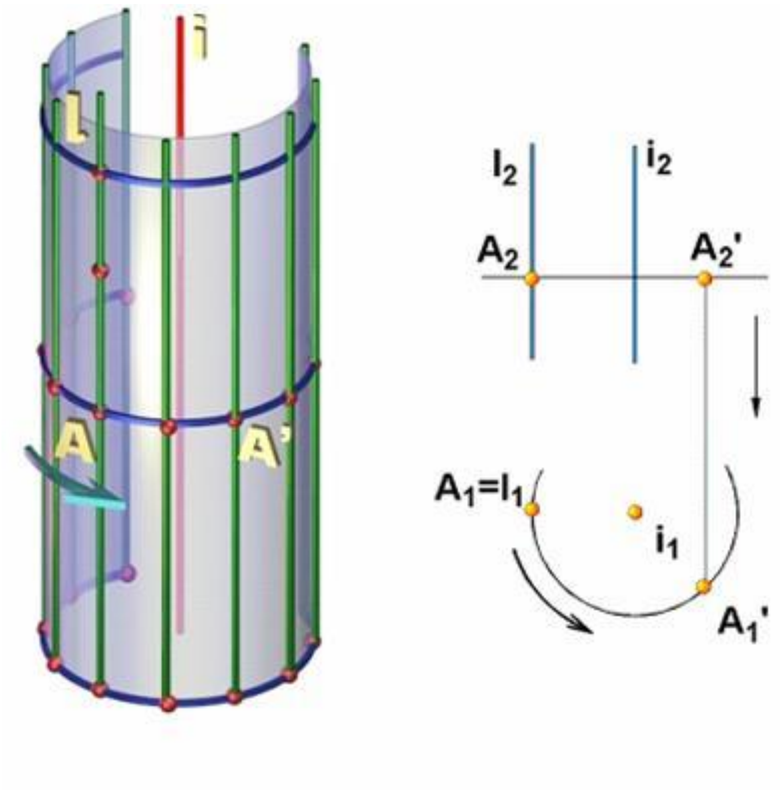
а б

Рис.7.3. Примеры определителя: а − алгоритмическая часть; б − геометрическая часть

Определитель конической поверхности вращения имеет вид $\Phi(l \cap i)[A]$.
На чертеже (рис. 7.5, б) конус вращения задан проекциями геометрической части его определителя:

$$l(l_1 l_2) \wedge i(i_1 i_2\}$$

В указанных примерах определитель поверхности выявляется путем анализа способов ее образования. Рассмотрим пример выявления определителя поверхности путем анализа ее основных свойств. Возьмем, например, сферу. *Сферой называется поверхность, образованная множеством точек пространства, находящихся на расстоянии | r | от данной точки О (рис. 7.6, а).* Геометрическая часть определителя сферы состоит из точки О (центра сферы) и точки М, принадлежащей ее поверхности. Алгоритм построения любой точки сферы заключается в проведении через точку О произвольной прямой и откладывания на ней от точки О отрезка | ОМ' = | ОМ | = | r |. Определитель сферы имеет вид Φ(О, М) [А].



а б

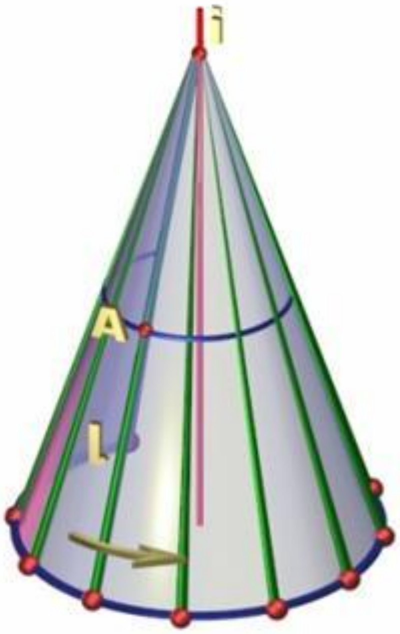
Рис. 7.4. Определитель цилиндрической поверхности: а – поверхность образована вращением прямой $l \parallel i$ вокруг оси i; б - цилиндр вращения задан проекциями геометрической части своего определителя

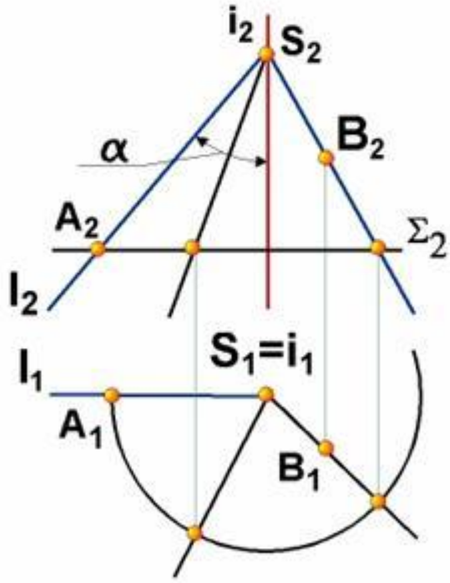
На рис. 7.6, б (справа) сфера задана проекциями точек $O(O_1O_2)$ и $M(M_1M_2)$, которые составляют геометрическую часть ее определителя, и показано построение произвольной точки $M^n(M^n{}_1\ M^n{}_2)$сферы.

При чтении чертежа немаловажную роль играет его наглядность. Задание поверхности проекциями геометрической части ее определителя не обеспечивает наглядности изображений. Поэтому для придания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению очерков ее проекций или проекций достаточно плотного каркаса ее образующих.

При проецировании поверхности на какую-либо плоскость проекций часть проецирующих лучей касается ее, образуя проецирующую поверхность. Точки касания при этом образуют линию видимого контура поверхности относительно этой плоскости проекций (рис. 7.7). Очерк проекции поверхности является проекцией соответствующей линии видимого контура.

Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части − видимую, обращенную к наблюдателю, и невидимую. Никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка.





а б

Рис. 7.5. Изображение определителя конической поверхности: а - алгоритмическая часть; б - геометрическая часть

На чертежах (рис. 7.8, а, в) конус вращения и сфера заданы проекциями геометрической части своего определителя, а на чертежах (рис. 7.8, б, г) для тех же поверхностей построены очерки их проекций. Последние, безусловно, обладают большей наглядностью и выразительностью.

Кривые поверхности разделяются на линейчатые и нелинейчатые, закономерные и незакономерные. Поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии, в противном случае − нелинейчатой.

Если поверхность может быть задана каким-либо уравнением, она называется закономерной, в противном случае − незакономерной, или графической (задается только чертежом).

Закономерные поверхности, в зависимости от вида уравнения, разделяются на алгебраические и трансцендентные.

Алгебраическое уравнение n-й степени (в декартовых координатах) задает алгебраическую поверхность n-го порядка (трансцендентные поверхности порядка не имеют). Алгебраическая поверхность n-го порядка пересекается плоскостью по кривой n-го порядка, а с прямой линией − в n точках.

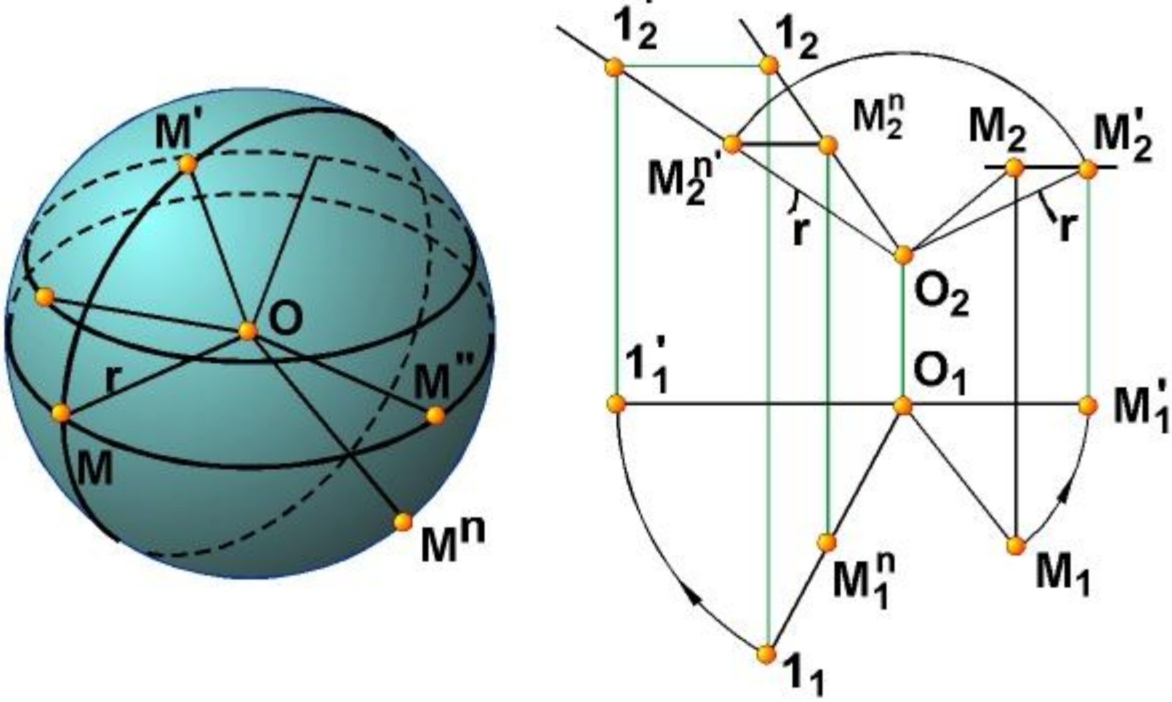


Рис. 7.6. Изображение определителя сферы: а – алгоритмическая часть; б – геометрическая часть

Плоскость, имеющую уравнение первой степени (с произвольной плоскостью пересекается по прямой линии, а с прямой − в одной точке), можно рассматривать как поверхность первого порядка. Примерами кривых поверхностей второго порядка могут служить поверхности, образованные вращением кривых второго порядка вокруг одной из своих осей.

Поверхности второго порядка пересекаются с произвольной плоскостью по кривым второго порядка, а с прямой − в двух точках. Примером поверхности четвертого порядка может служить тор (см. поверхности вращения).

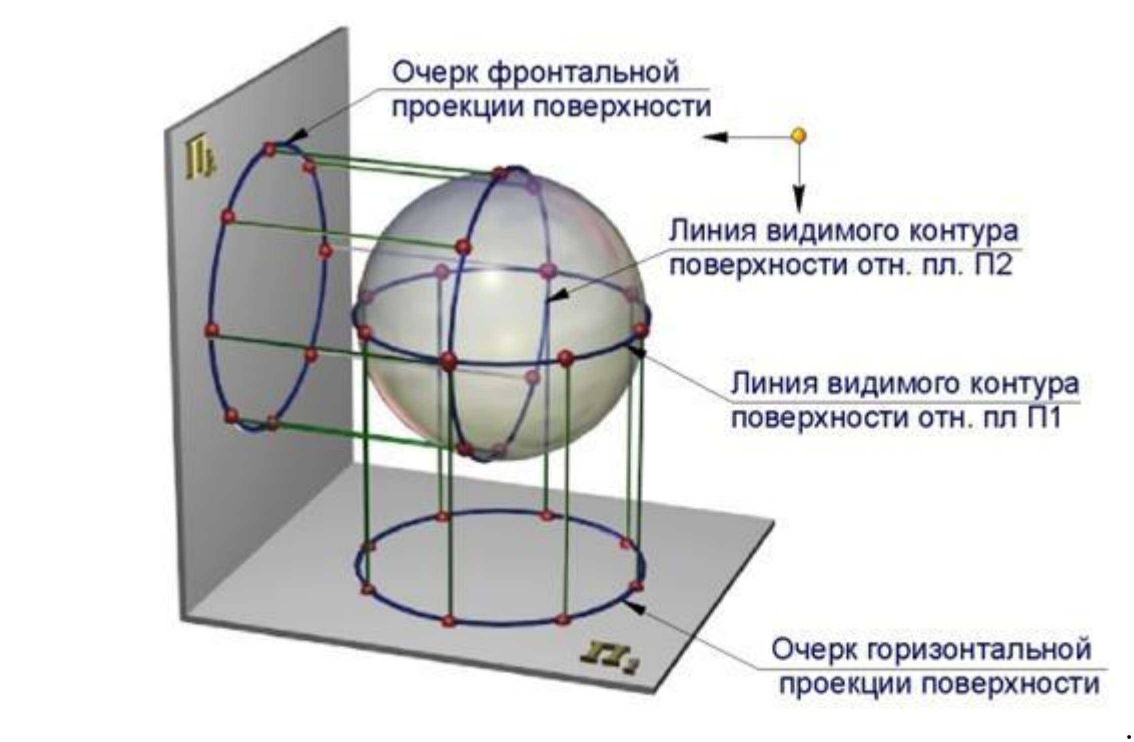


Рис. 7.7. Образование проекций сферы

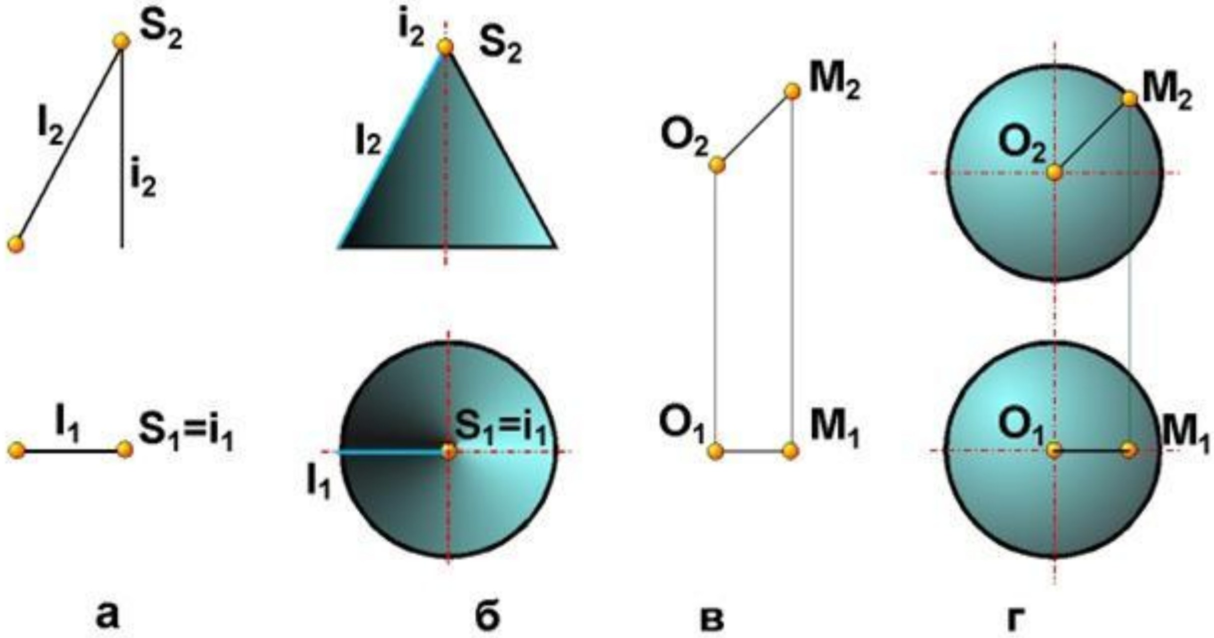


Рис. 7.8. а, в − проекции геометрической части определителей конуса и сферы; б, г − очерки проекций конуса и сферы

Определитель может быть положен в основу классификации поверхностей. К одному и тому же классу относятся поверхности, имеющие одинаковую структуру определителя.

Наибольшее применение в технике получили кинематические кривые поверхности с образующими постоянной формы:

1. Линейчатые поверхности:

а) развертывающиеся;
б) неразвертывающиеся;
в) винтовые.
2. Поверхности вращения.

7.2. Линейчатые поверхности

Как уже отмечалось, поверхность называется линейчатой, если она может быть образована перемещением прямой линии. Поверхность, которая не может быть образована движением прямой линии, называется нелинейчатой. Например, конус вращения − линейчатая поверхность, а сфера − нелинейчатая. Через любую точку линейчатой поверхности можно провести, по крайней мере, одну прямую, целиком принадлежащую поверхности. Множество таких прямых представляет собой непрерывный каркас линейчатой поверхности. Линейчатые поверхности разделяются на два вида:

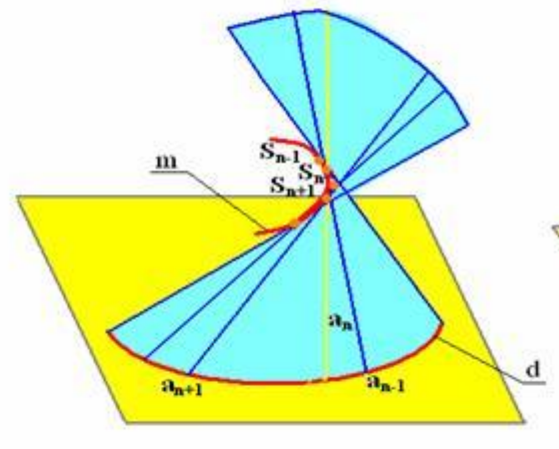
1) развертывающиеся поверхности;
2) неразвертывающиеся, или косые поверхности.
других линейчатых поверхностей.

Примечание. Все нелинейчатые поверхности являются неразвертывающимися.

Линейчатые поверхности с одной криволинейной направляющей называются торсами, а криволинейная направляющая таких поверхностей − ребром возврата.

Поверхностью с ребром возврата (торсом) называют поверхность, описываемую движением прямой − образующей, касающейся некоторой пространственной кривой − направляющей. Торсы являются поверхностями развертывающимися.

Поверхность называется развертывающейся, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов.



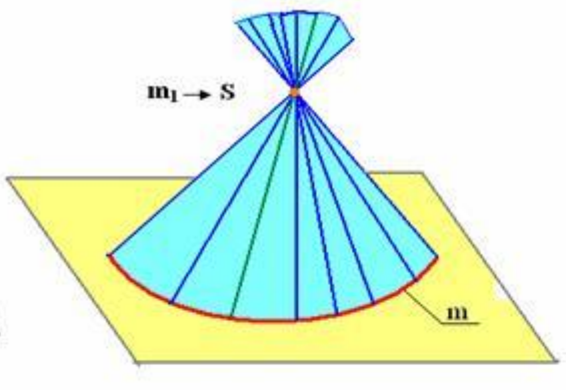


Рис. 7.9. Поверхность с ребром возврата Рис. 7.10. Коническая поверхность

Очевидно, что все многогранные поверхности являются развертывающимися.
Из кривых поверхностей этим свойством обладают только те линейчатые поверхности, которые имеют ребро возврата.

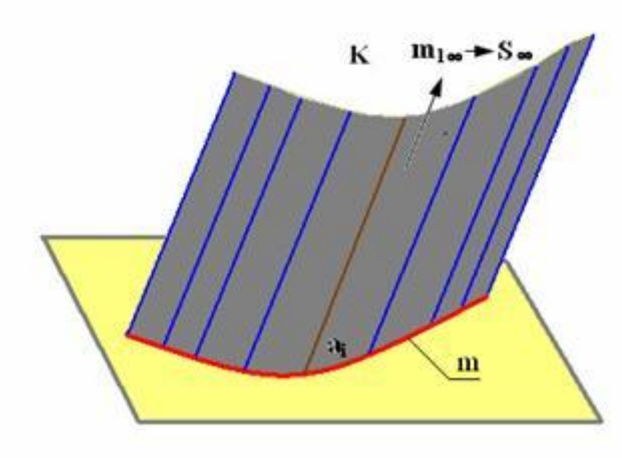


Рис. 7.11. Цилиндрическая поверхность

Существует только три вида линейчатых поверхностей, имеющих ребро возврата: торсы, конические и цилиндрические (Рис. 7.9 − 7.11) .

Необходимо отметить, что у всех развертывающихся линейчатых поверхностей две смежные образующие либо пересекаются (торс, коническая поверхность), либо параллельны (цилиндрическая поверхность).

7.3. Неразвертывающиеся (косые) линейчатые поверхности

Неразвертывающиеся линейчатые поверхности в общем случае образуются движением прямолинейной образующей по трем направляющим линиям, которые однозначно задают закон ее перемещения (рис. 7.12).

Направляющие линии могут быть кривыми и прямыми. Общий случай линейчатой поверхности, как множества образующих прямых, пересекающих три заданные пространственные кривые показан на рис. 7.13.

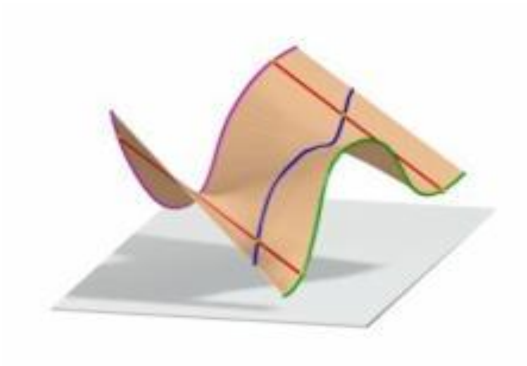


Рис. 7.12. Пример неразвёртывающейся поверхности

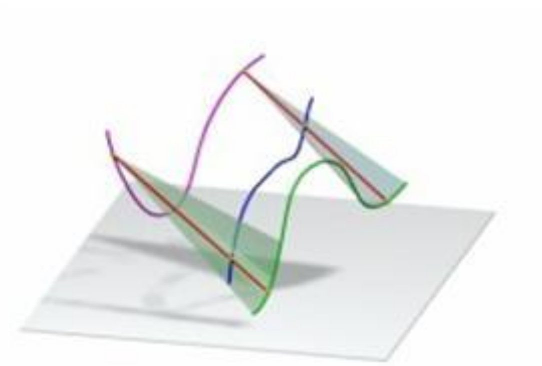


Рис. 7.13. Общий случай линейчатой поверхности

Разновидностями косых поверхностей являются линейчатые поверхности с направляющей плоскостью и частные их виды − линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана).

В первом случае поверхность однозначно задается двумя направляющими линиями и направляющей плоскостью, которая заменяет третью направляющую линию. Образующая прямая скользит по двум направляющим и сохраняет постоянный угол α с некоторой плоскостью **Σ**, которая называется направляющей. В частном случае, если угол равен нулю, образующая прямая будет параллельна направляющей плоскости, которая в этом случае называется плоскостью параллелизма.

Поверхности с направляющей плоскостью ($\alpha \neq 0$) называются косыми цилиндроидами, если обе направляющие являются кривыми линиями; косыми коноидами - если одна из направляющих − прямая линия; дважды косой плоскостью, если направляющие − скрещивающиеся прямые.

Дважды косой цилиндроид, как линейчатая поверхность с тремя направляющими, из которых две пространственные кривые и одна прямая показан на рис. 7.14.

На рис. 7.15. показан дважды косой коноид, образованный перемещением образующей прямой (красная) по трем направляющим, из которых две прямые. Показано построение одной образующей, как результата пересечения вспомогательной плоскости, проходящей через одну из прямолинейных направляющих, с двумя другими направляющими.

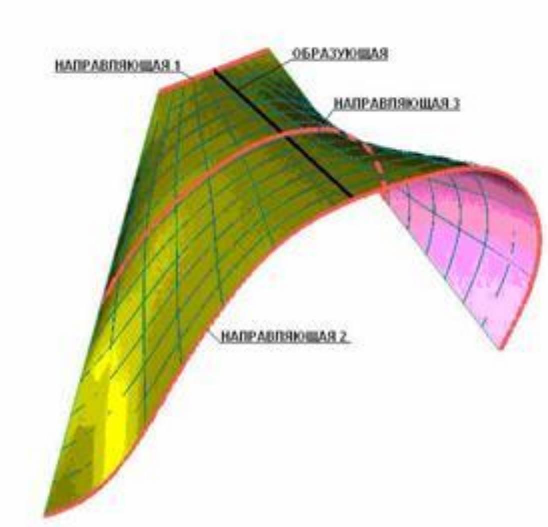


Рис. 7.14. Дважды косой цилиндроид

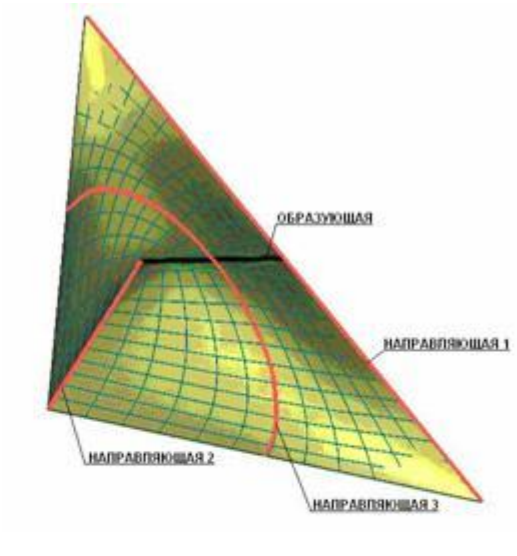


Рис. 7.15. Дважды косой коноид

Вопросы для самоконтроля

1. Как рассматриваются поверхности в начертательной геометрии?

2. Приведите краткую классификацию поверхностей, приняв за критерии классификации: а) вид образующей; б) характер перемещения образующей.

3. Что такое определитель поверхности? Что такое очерк поверхности?

4. Что значит «задать поверхность на чертеже»?
5. Сформулировать признак принадлежности точки поверхности.
6. Приведите примеры использования различных поверхностей в технике, науке, искусстве и других видах деятельности человека.

8. Позиционные задачи на поверхности

8.1. Пересечение поверхности плоскостью

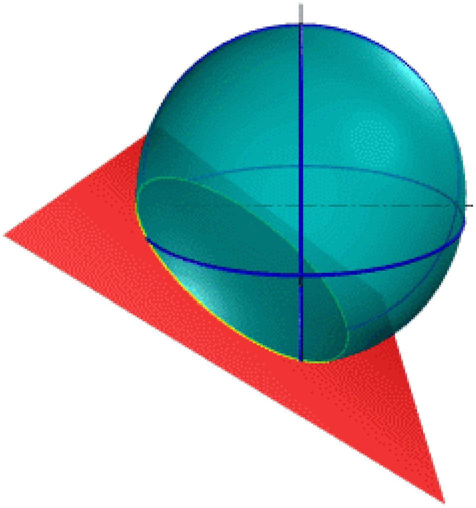
Определение взаимного положения плоскости и поверхности – позиционная задача, для решения которой применяется метод вспомогательных секущих плоскостей. В качестве вспомогательных секущих плоскостей используются проецирующиеся плоскости – плоскости перпендикулярные плоскостям проекций, поэтому основу метода вспомогательных секущих плоскостей составляет алгоритм решения задачи по нахождению линии пересечения поверхности проецирующей плоскостью.

Особое место занимают задачи по нахождению линии пересечения плоскости с конической поверхностью. В зависимости от положения секущей плоскости линией пересечения может быть окружность, эллипс, парабола, гипербола.

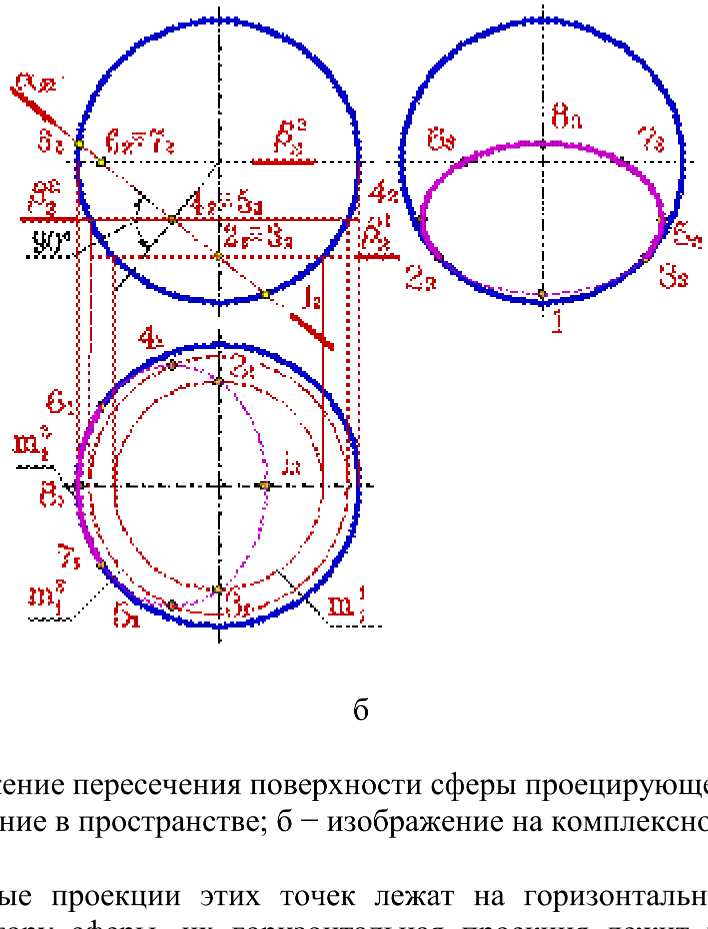
Для определения проекции линии сечения следует найти проекции точек, принадлежащих этой линии в следующем порядке:
1) проекции опорных точек – точек расположенных на очерковых образующих поверхности (эти точки определяют границы видимости проекции кривой);
2) проекции экстремальных точек, удаленных на минимальные и максимальные расстояния от плоскостей проекций;
3) проекции произвольных (промежуточные) точек линии сечения.

В зависимости от положения плоскости по отношению к плоскостям проекций, сложность решения позиционной задачи, по определению линии пересечения ее с поверхностью существенно меняется. Наиболее простым представляется случай, когда плоскость проецирующая, поэтому к рассмотрению предлагается пример пересечения поверхности проецирующей плоскостью

Окружность, по которой плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ пересекает сферу, проецируется на плоскости $\mathbf{\Pi_1}$ и $\mathbf{\Pi_3}$ в виде эллипса, а на плоскость $\mathbf{\Pi_2}$ в прямую линию ограниченную очерком сферы. Охарактеризуем выбранные для построения точки:
1, 8 – две вершины эллипса, определяющие положение малой оси на горизонтальной и профильной проекциях, их фронтальные проекции определяют пересечение следа плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ с очерком сферы. Эти точки являются соответственно высшей и низшей точками сечения.
2, 3 – фронтальные проекции этих точек лежит на вертикальной оси сферы, а профильные проекции будут лежать на очерке сферы и определять зону видимости при построении эллипса на Π_3.
4, 5 – две вершины эллипса, определяющие положение большой оси эллипса на горизонтальной и профильной проекциях, положение их фронтальной проекции определяет перпендикуляр, опущенный из центра сферы к следу плоскости $\boldsymbol{\alpha}$.



а



б

Рис. 8.1. Изображение пересечения поверхности сферы проецирующей плоскостью: а − изображение в пространстве; б − изображение на комплексном чертеже

6, 7 – фронтальные проекции этих точек лежат на горизонтальной оси сферы, т.е. принадлежат экватору сферы, их горизонтальная проекция лежит на очерке сферы и определяет зону видимости при построении эллипса на Π_1.

Линия пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и сферы на фронтальной плоскости проекций совпадает со следом плоскости $\boldsymbol{\alpha}$, на ней отмечаем точки $\mathbf{1_2 \ldots 8_2}$. Для нахождения горизонтальных проекций этих точек в общем случае используется метод вспомогательных секущих плоскостей ($\boldsymbol{\beta}$- горизонтальные плоскости уровня). Например, через точки $\mathbf{2_2}$, $\mathbf{3_2}$ проведем след плоскости $\boldsymbol{\beta}^1{}_2$, на горизонтальной плоскости проекций линией пересечения плоскости $\boldsymbol{\beta_1}$ и сферы будет окружность $\boldsymbol{m_1^1}$, а точки $\boldsymbol{2_1}$ и $\boldsymbol{3_1}$ лежат на

этой окружности по линии связи (в данном случае осевой линии). Таким образом находятся все точки, кроме 1_1 и 8_1 , которые ввиду своего положения на очерке фронтальной проекции сферы будут принадлежать горизонтальной осевой линии на плоскости **П**$_1$. Построенные точки $1_1 \ldots 8_1$ соединим плавной кривой линией с.
Особое место занимают задачи по нахождению линии пересечения плоскости с конической поверхностью. В зависимости от положения секущей плоскости линией пересечения может быть окружность, эллипс, парабола.

8.2. Конические сечения

В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения конической поверхности могут быть: эллипс, парабола, гипербола и окружность а в частных случаях: прямая, две пересекающиеся прямые и точка (рис. 8.3).

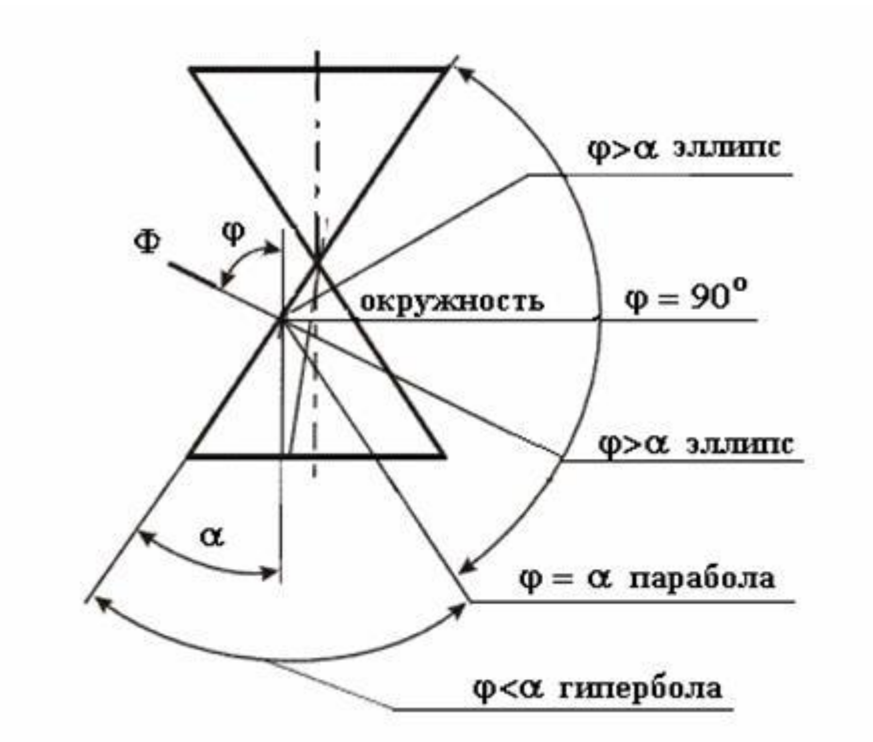
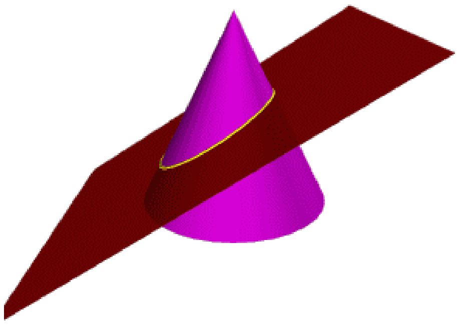


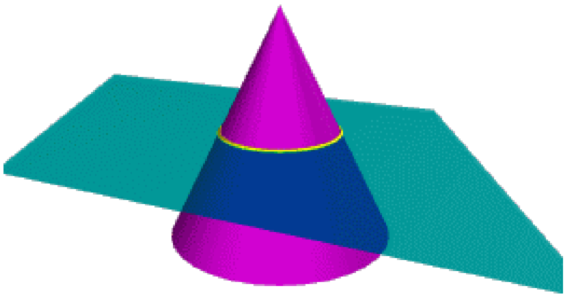
Рис. 8.2. Изображение возможных сечений конической поверхности

Рассмотрим некоторые примеры пересечения конуса плоскостью.
Если плоскость ***Ф*** пересекает все образующие поверхности конуса вращения, т.е. если $\varphi > \alpha$, то линией сечения является ***эллипс*** (рис. 8.3 а). В этом случае секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих поверхности конуса.

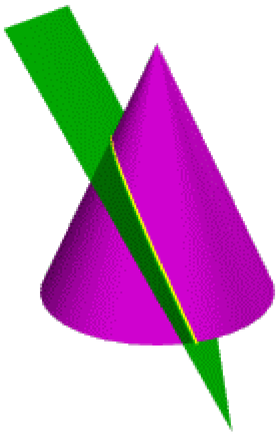
Если плоскость ***Ф*** параллельна основанию поверхности конуса, то линией пересечения является ***окружность*** (рис. 8.3.б).



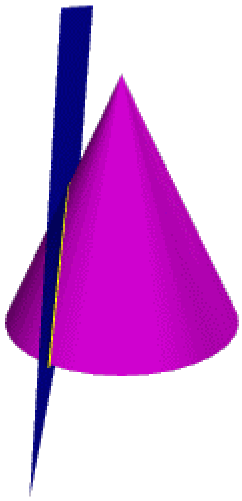
а



б



в



.

г

Рис. 8.3. Изображение линии сечения поверхности конуса плоскостью: а – эллипса; б – окружности; в – параболы; г – гиперболы

Если плоскость ***Ф*** параллельна одной образующей поверхности конуса, т.е. ***φ=α***, то линией пересечения является ***парабола*** **(**рис.8.3.в**)**. В частном случае (плоскость является касательной к поверхности конуса) сечение вырождается в ***прямую***.

Если плоскость ***Ф*** параллельна двум образующим поверхности конуса (в частном случае параллельна оси конуса), т.е. ***φ<α***, то линией сечения является ***гипербола*** **(**рис. 8.3. г). В случае прохождения плоскости через вершину конической поверхности фигурой сечения могут быть сами образующие, т.е. гипербола вырождается в ***две пересекающие прямые***.

8.3. Взаимные пересечения поверхностей

Построение линии пересечения поверхностей осуществляется при помощи вспомогательных секущих поверхностей. При этом данные поверхности пересекаются вспомогательной поверхностью и определяются линии пересечения каждой из данных поверхностей со вспомогательной. Если эти линии пересекаются (а они, в силу принадлежности одной и той же вспомогательной поверхности, могут пересекаться, касаться или не иметь общих точек), то полученные точки пересечения принадлежат обеим данным поверхностям и, следовательно, их линии пересечения.

Если в качестве вспомогательных секущих поверхностей используются плоскости, то способ построения называют ***способом вспомогательных плоскостей***. Если используются сферы − ***способом вспомогательных сфер***. Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения цилиндра с конусом вращения (рис.8.4).

Для построения линии пересечения заданных поверхностей удобно в качестве вспомогательных поверхностей использовать серию горизонтальных плоскостей, перпендикулярных оси конуса, которые пересекают цилиндр и конус по окружностям. На пересечении этих окружностей находят точки искомой линии пересечения.

Известно, что если ось поверхности вращения проходит через центр сферы и сфера пересекает эту поверхность, то линия пересечения сферы и поверхности вращения − окружность, плоскость которой перпендикулярна оси поверхности вращения. При этом, если ось поверхности вращения параллельна плоскости проекций, то линия пересечения на эту плоскость проецируется в отрезок прямой линии. Это свойство используют для построения линии взаимного пересечения двух поверхностей вращения с помощью вспомогательных сфер. При этом могут быть использованы концентрические и неконцентрические сферы. Рассмотрим применение вспомогательных концентрических сфер − сфер с постоянным центром.

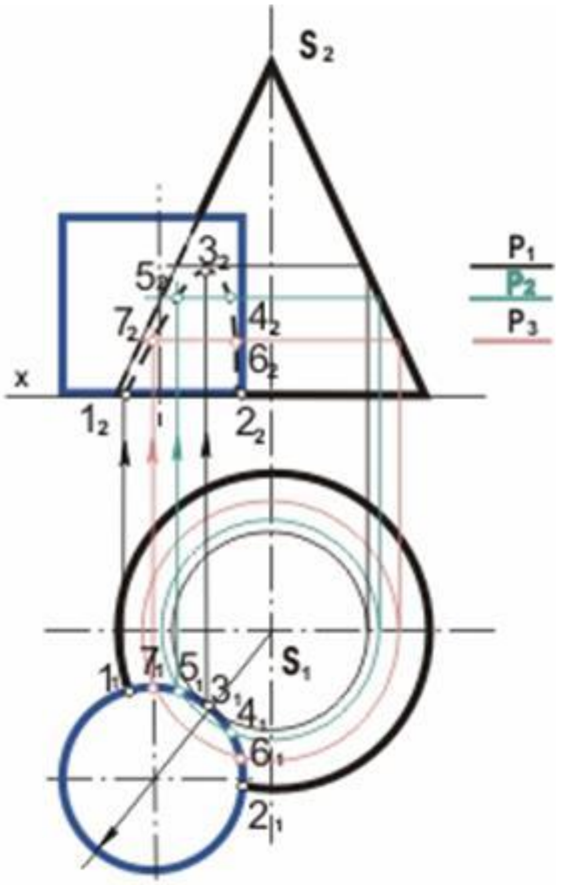


Рис. 8.4. Пример построения линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра с помощью вспомогательных секущих плоскостей

Способ секущих сфер с постоянным центром для построения линии пересечения двух поверхностей применяют при следующих условиях:

- обе линии пересекающиеся поверхности − поверхности вращения;

-оси поверхностей вращения пересекаются;

- точку пересечения принимают за центр вспомогательных (концентрических) сфер;

- плоскость, образованная осями поверхностей (плоскость симметрии), должна быть параллельна плоскости проекций.

В случае, если это условие не соблюдается, то, чтобы его обеспечить, прибегают к способам преобразования чертежа.

Такие сферы применяют, если:

- одна из пересекающихся поверхностей - поверхность вращения, другая поверхность имеет круговые сечения;

- две поверхности имеют общую плоскость симметрии (т. е. ось поверхности вращения и центры круговых сечений второй поверхности принадлежат одной плоскости - плоскости их симметрии);

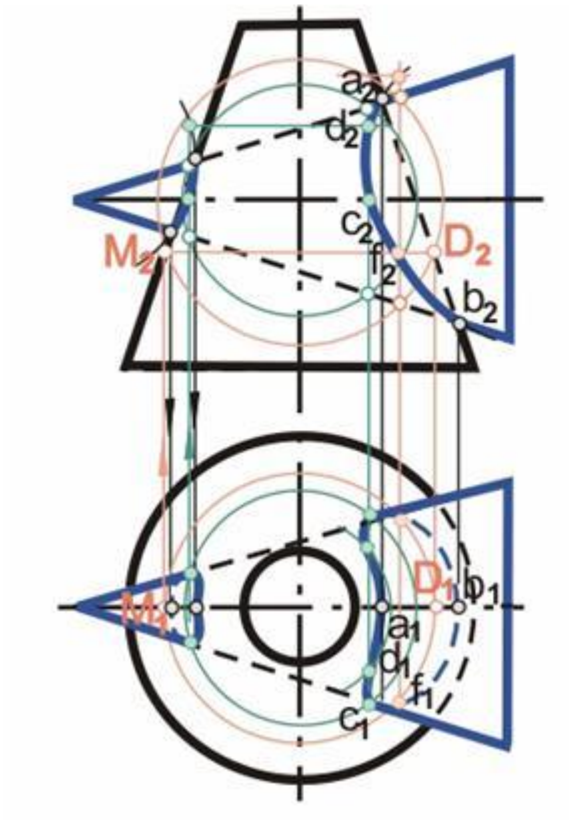


Рис. 8.5. Пример построения линии пересечения поверхностей конусов с помощью концентрических сфер

Плоскость симметрии параллельна плоскости проекций (это условие при необходимости может быть обеспечено преобразованием чертежа).

Рассмотрим построение линии пересечения прямого кругового конуса и тора, оси которых скрещиваются с помощью эксцентрических сфер (рис. 8.6).

Ось конуса параллельна плоскости $П_2$, ось тора перпендикулярна плоскости $П_2$, окружность центров осевых круговых сечений тора и ось конуса лежат в одной плоскости, параллельной плоскости $П_2$. Две очевидные характерные точки: высшая с проекцией a_2 и низшая d_2 - являются точками пересечения проекций очерков тора и конуса. Для построения проекций промежуточных точек, например проекции b_2, выполняют следующие построения: выбирают на поверхности тора окружность, например с проекцией 1_2 2_2 с центром в точке с проекцией 3_2.

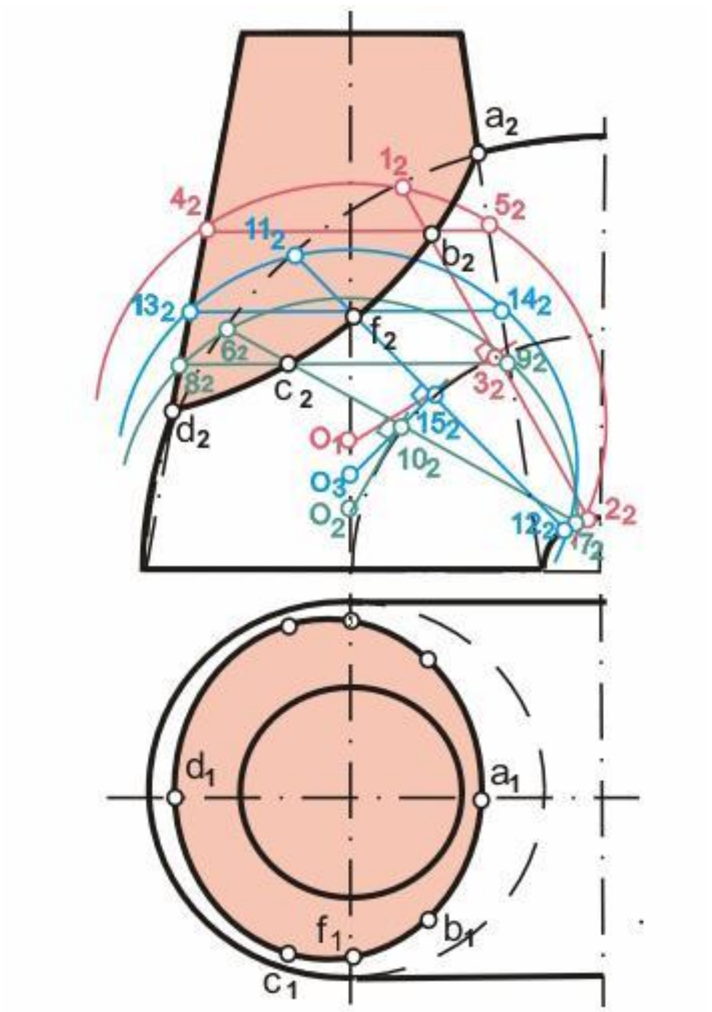


Рис. 8.6. Пример построения линии пересечения поверхностей конуса и тора с помощью эксцентрических сфер

Перпендикуляр к плоскости этой окружности из точки с проекцией 3_2 является линией центров множества сфер, которые пересекают тор по окружности с проекцией 1_2 2_2. Из множества этих сфер выбирают сферу с центром на оси конуса. Его проекция O_1. Эта сфера радиусом R_1 пересекает конус по окружности с проекцией 4_2 5_2. Пересечение проекций 1_2 2_2 и 4_2 5_2 является проекцией пары общих точек тора и конуса, т.е. линии их пересечения. На чертеже обозначена проекция b_2 одной из указанных точек - точки на видимом участке линии пересечения.

Построение проекций второй пары точек линии пересечения, из которых обозначена проекция c_2, выполнено с помощью отрезка 6_2 7_2 − проекции окружности на поверхности тора. Вспомогательная сфера для построения проекции c_2 − сфера радиуса R_2 с центром, проекция которого O_2. Конус эта сфера пересекает по окружности с проекцией 8_2 9_2. В пересечении проекций 6_2 7_2 и 8_2 9_2 окружностей находим проекцию c_2 искомой точки и симметричной ей на невидимой части пересекающихся поверхностей.

Вопросы для самоконтроля

1) От каких параметров поверхности и плоскости зависит форма линии пересечения поверхности с плоскостью?

2) Каков алгоритм (порядок) определения линии пересечения поверхности плоскостью?

3) Какое положение плоскости пересечения по отношению к поверхности является предпочтительным для определения линии пересечения?

4) Какой способ построения линии пересечения называется способом вспомогательных сфер?

5) В каком случае при определении линии пересечения применяются концентрические (эксцентрические) сферы?
6) Какой способ построения линии пересечения необходимо применить, если две поверхности имеют общую плоскость симметрии?
7) Приведите пример определения линии пересечения поверхностей с помощью эксцентрических сфер.

9. Построение разверток

9.1. Основные понятия и свойства

Поверхность называется развертывающейся, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. При этом исходим из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки. Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата: торсы, конические и цилиндрические.

Линейчатые косые и нелинейчатые поверхности этим свойством не обладают. Существуют различные способы построения их условных разверток при помощи аппроксимации.

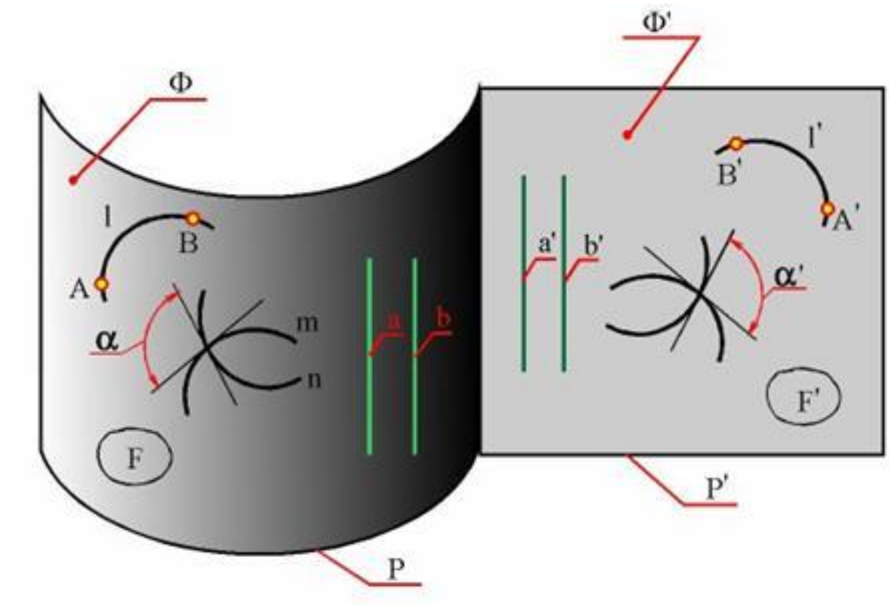


Рис. 9.1. Развертка поверхности

Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой (рис. 9.1). Между поверхностью и ее разверткой существует взаимно-однозначное точечное соответствие (точке A на поверхности соответствует точка A' на развертке, и наоборот), обладающее следующими свойствами (рис. 9.1):

1) длина участка AB линии l на поверхности равна длине участка A'B' соответствующей ей линии l на развертке;

2) угол α между кривыми m и n на поверхности равен углу α’ между соответствующими им кривыми m' и n' на развертке (углом между кривыми называется угол между касательными к ним в точке пересечения);

3) площадь отсека F поверхности равна площади соответствующего ему отсека F' развертки.

В дифференциальной геометрии доказывается, что второе и третье свойства являются следствием первого. Первое свойство вытекает из представления поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленки.

Из рассмотренных свойств следует:

1) прямой линии (a) на поверхности соответствует прямая (a') на развертке;
2) прямым, параллельным ($a \parallel b$) на поверхности, соответствуют прямые, параллельные ($a' \parallel b'$) на развертке.

Однако оба указанных свойства обратной силы не имеют, т. е. не всякой прямой на развертке соответствует прямая на поверхности. Примерами этого могут служить цилиндрическая винтовая линия, параллели поверхности вращения.

Если кривой линии, принадлежащей поверхности, соответствует прямая на развертке, то эта кривая линия является **геодезической** для данной поверхности.

Геодезической называется линия, принадлежащая поверхности и соединяющая кратчайшим путем две точки, также принадлежащие поверхности.

9.2. Построение разверток многогранников

Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную при совмещении всех его граней с плоскостью. Следовательно, построение развертки многогранника сводится к построению истинных величин его граней. Выполнение этой операции связано с определением натуральных величин его ребер, которые являются сторонами многоугольников – граней, а иногда и некоторых других элементов. Ребра многогранника условно разделяются на боковые и стороны основания. Существуют три способа построения разверток многогранных поверхностей:

1) способ треугольников (триангуляции);
2) способ нормального сечения;
3) способ раскатки.

Построение развертки пирамиды способом триангуляции

Боковые грани любой пирамиды являются треугольниками. Для построения развертки пирамиды (рис. 9.2) необходимо предварительно определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания.

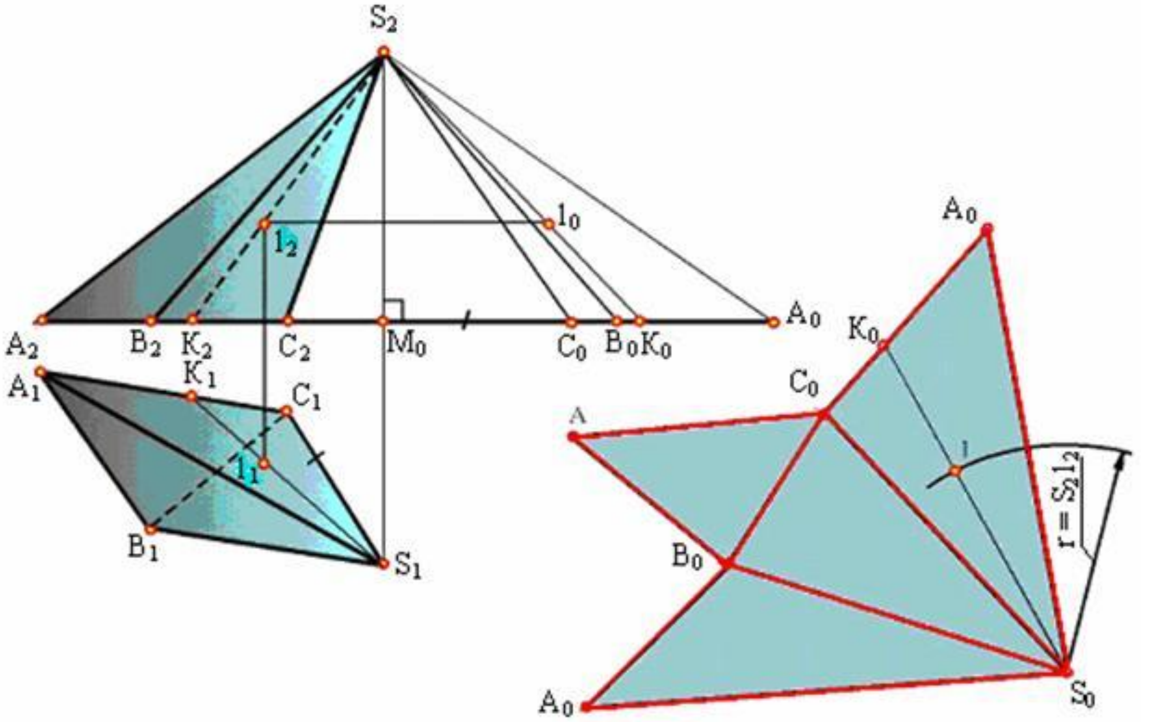


Рис. 9.2. Построение развертки пирамиды

У изображенной на рисунке пирамиды стороны основания являются горизонталями и проецируются на плоскость $П_1$ в истинную величину. Истинные величины боковых ребер определены способом прямоугольных треугольников. $S_2M_0C_0$, $S_2M_0B_0$ и $S_2M_0A_0$, у которых одним катетом является высота пирамиды (S_2M_0 - разность высот точки S и точек A, B, C), а другим - горизонтальная проекция соответствующего ребра. ($/M_0C_0/ = /S_1C_1/$; $/M_0B_0/ = /S_1B_1/$; $/M_0A_0/ = /S_1A_1/$; $/M_0K_0/ = /S_1K_1/$).

Натуральные величины ребер пирамиды могут быть определены способом вращения вокруг оси, проходящей через вершину S и перпендикулярной плоскости Π_1. Следующая операция состоит в построении каждой боковой грани как треугольника по трем сторонам. В результате получается развертка боковой поверхности пирамиды в виде ряда примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной S. Присоединив к полученной фигуре основание (△ABC), получим полную развертку пирамиды. Построение на развертке точки 1, принадлежащей поверхности пирамиды, понятно из чертежа. Такой способ построения развертки поверхности называется способом триангуляций.

Построение развертки призмы способом нормального сечения

Для построения развертки наклонной призмы, изображенной на рис. 9.3 необходимо найти истинные величины боковых ребер и сторон основания призмы. Призма расположена так, что ее боковые ребра параллельны плоскости Π_2 и проецируются на нее в натуральную величину. Стороны оснований являются горизонталями и проецируются на плоскость Π_1 без искажения. Таким образом, длины сторон каждой грани известны, однако этого еще недостаточно для построения истинной формы боковых граней.

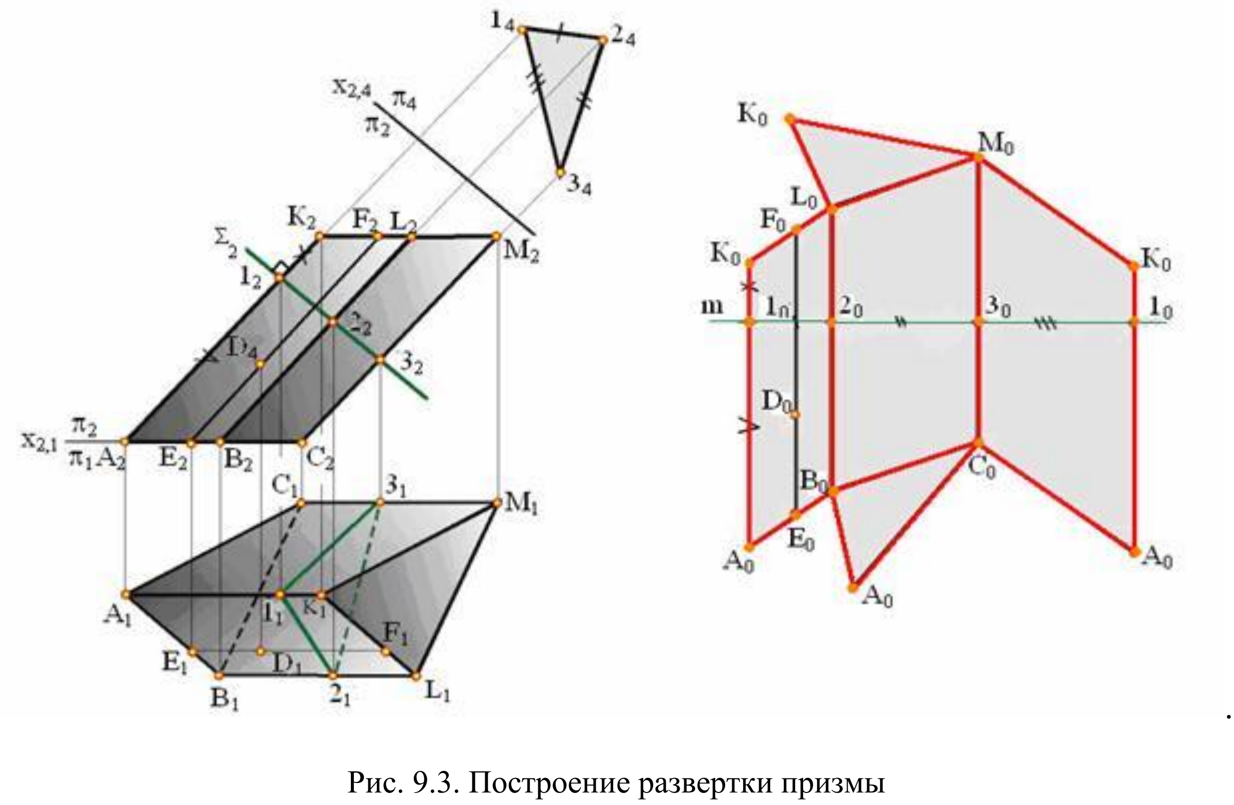


Рис. 9.3. Построение развертки призмы

Боковые грани наклонной призмы являются параллелограммами, которые не могут быть построены по четырем сторонам. Для построения параллелограмма необходимо помимо длины сторон знать еще его высоту. Для определения высот граней пересечем призму плоскостью $\Sigma(\Sigma_2)$, перпендикулярной к ребрам (способ нормального сечения), и определим истинную величину сечения путем замены плоскостей проекций. Стороны этого нормального сечения и будут высотами соответствующих граней. Теперь приступаем к построению развертки. На свободном месте чертежа проводим горизонтальную прямую m и откладываем на ней отрезки /1 - 2/ = /1_4 - 2_4/, /2 - 3/ = /2_4 - 3_4/ и /3 - 1/ = /3_4 - 1_4/.

Через точки 1, 2, 3, 1 проводим перпендикуляры к прямой m и откладываем на них величины боковых ребер так, чтобы /A1/ = /$A_2 1_2$/ и /1K/ = /$1_2 K_2$/, /B2/ = /$B_2 2_2$/ и /2L/ = /$2_2 L_2$/ и т. п.

Соединив концы построенных отрезков, получим развертку боковой поверхности призмы. Присоединив к ней оба основания, получим полную развертку призмы. Построение на развертке точки 4, принадлежащей поверхности призмы, понятно из чертежа.

9.3. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей

Необходимо отметить, что к развертывающимся поверхностям относятся только торсы (поверхности с ребром возврата, коническая и цилиндрическая поверхности).

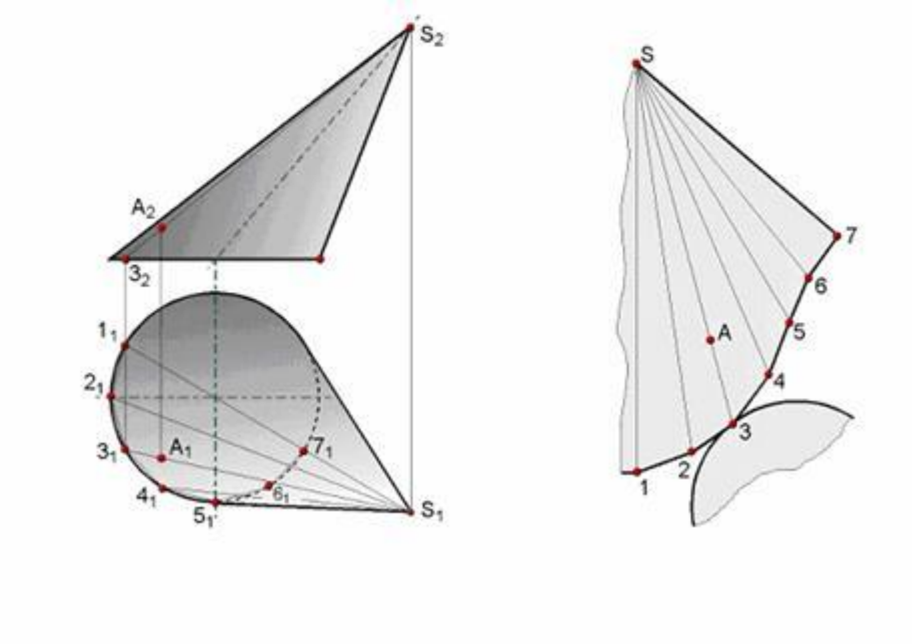


Рис. 9.4. Построение развертки эллиптического конуса

Развертка любой развертывающейся поверхности (кроме гранных) является приближенной. Это можно объяснить тем, что при развертке такой поверхности ее аппроксимируют поверхностями вписанных или описанных многогранников, имеющих грани в форме прямоугольников или треугольников. Поэтому при графическом выполнении развертки поверхности происходит спрямление кривых линий, принадлежащих поверхности, что и приводит к потере точности. Обычно строят приближенные развертки поверхностей, вполне пригодные для практических целей. Используя способ триангуляции необходимо определить истинные величины ребер вписанной пирамиды. Поверхность заменяется многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Рассмотрим применение способа триангуляции к построению развертки эллиптического конуса, изображенного на чертеже (рис. 9.4).

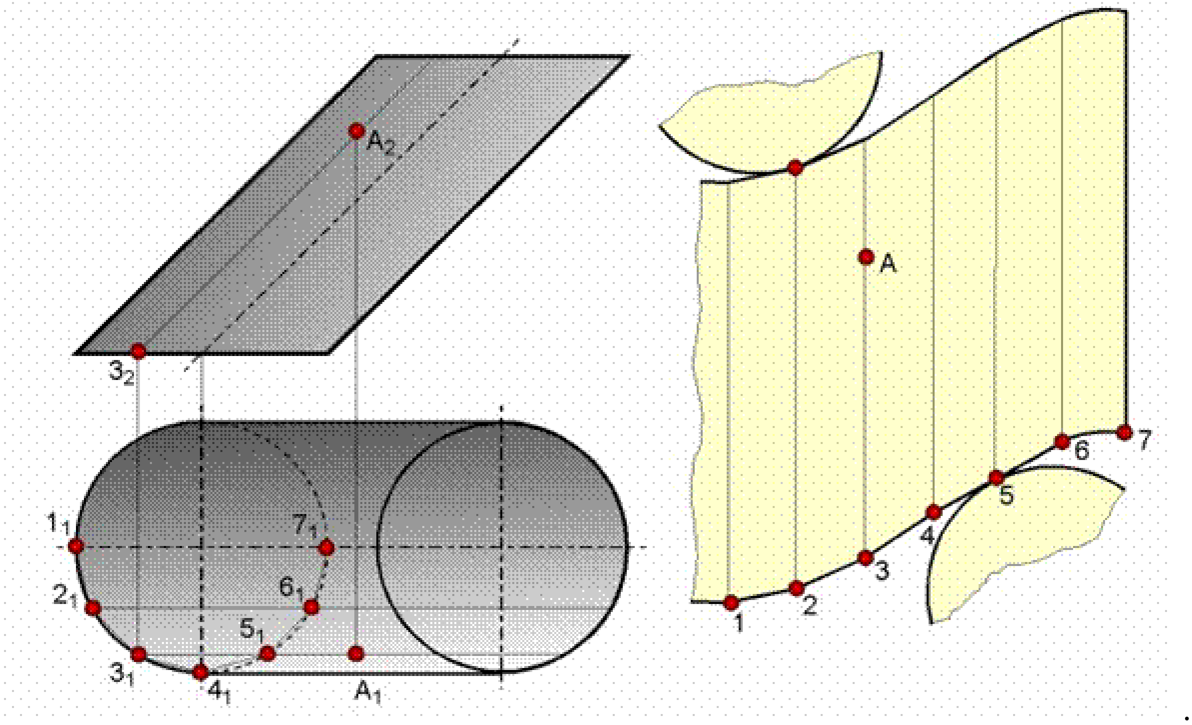


Рис. 9.5.Построение развертки цилиндрической поверхности

Триангуляция конической поверхности осуществляется вписыванием в нее пирамидальной поверхности, которая определяется ломаной 1 - 2 - 3 - 4, ..., вписанной в направляющую кривую конуса, и вершиной S. Развертка этой n-угольной пирамиды и принимается за развертку конуса. Все построения на чертеже (рис. 9.4) выполняются аналогично построениям на чертеже (рис.9.2). Ломаная линия 1 - 2 - 3 - 4, ..., получающаяся на развертке пирамиды, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки.

При построении разверток цилиндрических поверхностей способ триангуляции, как правило, не применяется. Цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной в нее призматической поверхностью, которая определяется ломаной 1 - 2 - 3 - 4, ..., вписанной в направляющую кривую цилиндра, и направлением образуюших. Развертка этой п-угольной призмы и принимается за развертку цилиндра (рис. 9.5). Все построения выполняются, как на рис. 9.3.

Ломаная линия - 2 - 3 - 4, ..., получающаяся на развертке призмы, заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки. Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами, соответственно равными 2пr и h, где r - радиус окружности основания цилиндра, а h - его высота.

9.4. Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

Развертку неразвертывающейся поверхности построить нельзя. Для построения условной развертки такой поверхности применяют метод аппроксимации, который заключается в следующем.

Данная неразвертываюшаяся поверхность Ф разбивается на некоторые отсеки. Каждый из этих отсеков заменяется отсеком кривой развертывающейся поверхности. Совокупность всех отсеков развертывающихся поверхностей называется обводом Ф' поверхности Ф. С помощью триангуляции обвод Ф' заменяется обводом Ф'' гранных поверхностей. Развертка гранных поверхностей, образующих обвод Ф'', принимается за условную развертку поверхности Ф. При свертывании такой развертки, кроме изгибания, необходимо произвести частичное растяжение или сжатие отдельных ее участков.

Построение развертки сферы

Сферическая поверхность является неразвертывающейся. Существующие методы построения ее развертки дают лишь приближенные результаты.

Сущность одного из них заключается в том, что элемент сферической поверхности заменяется элементом цилиндрической поверхности касательной к сфере по главному меридиану m. Ось такой цилиндрической поверхности проходит через центр сферы перпендикулярно $G_{2.}$ При этом под элементом сферы понимают часть ее, ограниченную двумя большими окружностями.

Для выполнения построения развертки поверхность сферы:

1) разделить большими окружностями на несколько (например 6) равных частей. Каждый из образовавшихся элементов сферы проецируется на плоскость $П_1$, в виде сектора;

2) описать вокруг сферы цилиндрическую поверхность, ось которой проходит через центр сферы перпендикулярно к $П_2$;

3) заменить элемент сферы частью цилиндрической поверхности. Горизонтальной проекцией этого цилиндрического элемента окажется треугольник $A_1B_1O_1$, а фронтальной – контур сферы (дуга окружности).

4) для построения развертки цилиндрического элемента (лепестка) разделить его фронтальную проекцию на восемь равных частей;

5) построить горизонтальные проекции образующих, соответствующих точкам деления. Истинные длины отрезков образующих для построения развертки взять с горизонтальной проекции (отрезки A_1 B_1, C_1 D_1, E_1 F_1, G_1 H_1) а расстояния между ними измерить на фронтальной проекции (расстояния между точками 1_22_2, и 2_23_2);

6) при построении цилиндрического элемента (лепестка) через середину отрезка AB = A_1B_1 провести вертикальную ось симметрии лепестка на которой отложить вверх и вниз четыре отрезка $1_0 – 2_0 = 1_22_2$, $2_0 – 3_0 = 2_23_2$, $3_0 – 4_0 = 3_24_2$, $4_0 – 5_0 = 4_25_2$.

7) через точки 2_0, 3_0, 4_0 провести отрезки $C_0D_0 = C_1D_1$, E_0F_0, $G_0H_0 = G_1H_1$.

8) соединить плавной кривой концы отрезков, в результате чего получится развертка верхней половины лепестка.

При выполнении построения развертки часто возникает необходимость определить положение какой-либо точки на поверхности. Рассмотрим положение точки К на поверхности сферы и перенесем ее изображение на развертку. Это можно выполнить с помощью двух координат дуг S_1 и S_2. S_2 показывает смещение точки К от экватора к полюсу, а дуга S_1 − смещение ее от одного из меридианов по параллели сферы. Дуга S_2 равна той части меридиана сферы, которая ограничена экватором и параллелью, проходящей через точку К (K_2).

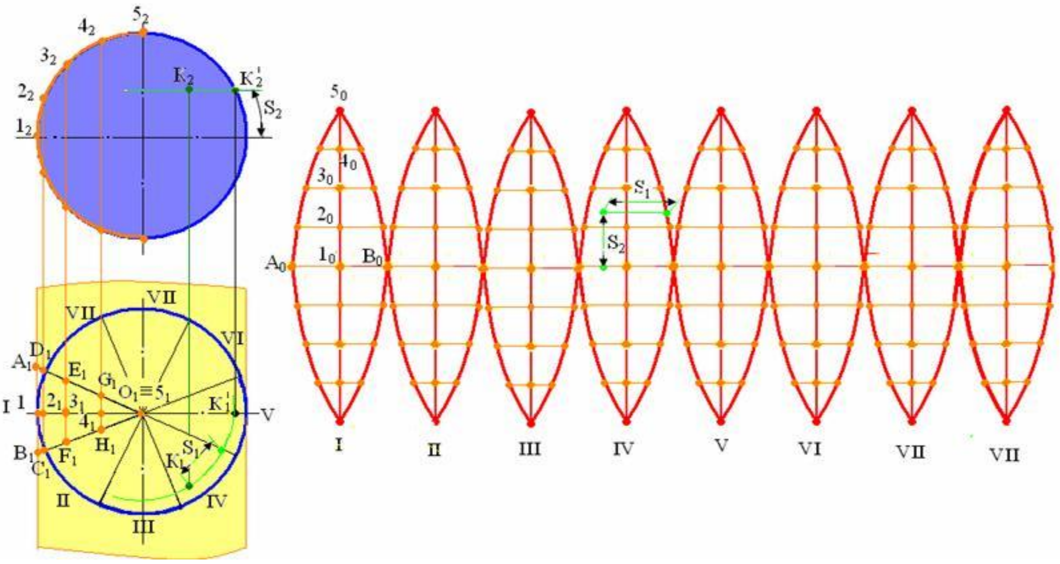


Рис. 9.6. Построение развертки сферы

Длину этой дуги $S_2 = K_2 M'_2$ нужно откладывать на развертке от экватора соответствующего лепестка по вертикальной оси симметрии.

Строим развертку каждого сектора (лепестка) цилиндрической поверхности. На чертеже (рис. 9.6, в) показана развертка одного из них. Затем ломаная 1 - 3 - 5 - 7... заменяется плавной кривой, проходящей через те же точки (рис. 9.6, г). Полученная фигура принимается за условную развертку сектора сферы. Полная развертка будет состоять из восьми таких фигур (рис. 9.6, д).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие поверхности называются развёртывающимися?
2. Какие поверхности обладают свойством развёртываемости?
3. Какие способы построения условных развёрток вы знаете?
4. Что представляет собой развёртка многогранника?
5. Перечислите, какие способы развёрток гранных поверхностей вы знаете.
6. В чём сущность способа нормального сечения?
7. Какова развёртка кривых развёртывающихся поверхностей?
8. В чём сущность способа раскатки?
9. Как построить условную развёртку неразвёртывающихся поверхностей?

10. Плоскости, касательные к поверхности

10.1. Основные положения

Касательные плоскости имеют большое значение в начертательной геометрии. Наличие касательных плоскостей позволяет определить направление нормали **n** к поверхности в точке касания М. Решение таких задач находит широкое применение в инженерной практике. С помощью касательных плоскостей выполняют построение очерков геометрических фигур, ограниченных замкнутыми поверхностями.

Прямая линия t, касательная к какой-либо кривой линии g, принадлежащей поверхности, является касательной и к поверхности (Рис. 10.1, а).

Нормалью к поверхности в заданной точке называется прямая, которая перпендикулярна к касательной плоскости τ и проходящая через точку касания (Рис. 10.1, б).

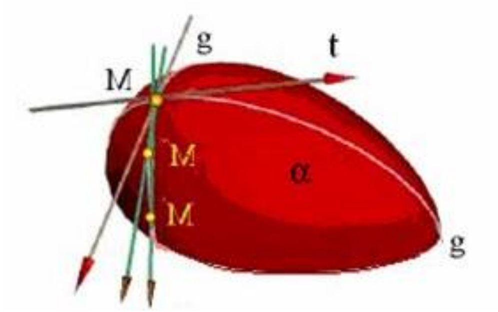
Плоскость, касательная к поверхности в заданной на поверхности точке М, есть множество всех прямых − касательных, проведенных к поверхности через данную точку. Через любую точку поверхности можно провести множество кривых, а, следовательно, и множество касательных прямых. Положение плоскости в пространстве определяется двумя пересекающимися прямыми, поэтому для построения касательной плоскости к поверхности в заданной точке достаточно построить касательные к двум кривым линиям, проходящим через эту точку. В качестве таких кривых выбирают наиболее простые линии поверхности. Если данная поверхность является линейчатой, то за одну из таких кривых целесообразно взять прямолинейную образующую (касательная к прямой линии есть сама прямая).

В дифференциальной геометрии доказывается, что все эти касательные прямые располагаются в одной плоскости, которая называется **касательной плоскостью (τ)** к поверхности в данной ее точке (рис. 10.1, б).

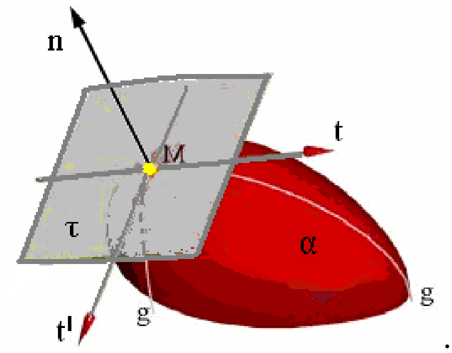
Если через точку поверхности можно провести касательную плоскость и при том одну, то точка поверхности называется о б ы к н о в е н н о й, в другом случае − о с о б о й (например, вершина конической поверхности).

Касательная плоскость и кривая поверхность могут занимать различные положения относительно друг друга. При этом общим элементом может быть только элемент касания: либо точка М (рис. 10.1), либо линия (рис. 10.2). Эта линия может прямой (рис. 10.2, а) или кривой (рис. 10.2, б).

При построении касательной плоскости либо указывают точку касания, либо задают другие условия для ее проведения (например: касательная плоскость должна проходить через заданную вне поверхности точку; касательная плоскость должна быть параллельна некоторой прямой и др.).

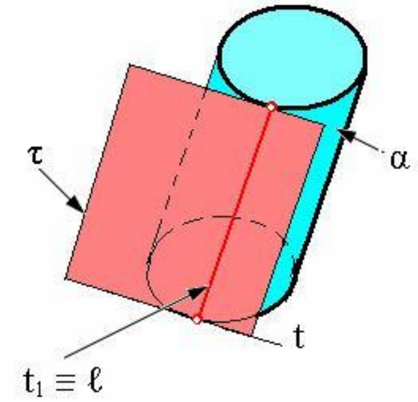


а

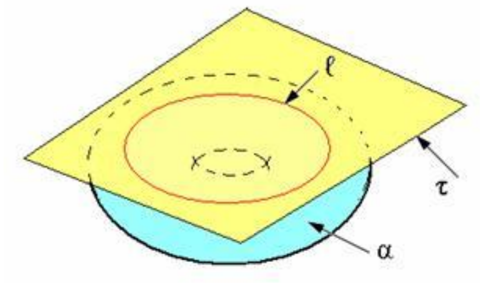


б

Рис. 10.1. Касательные к поверхности α: а − прямая t , б − плоскость



а



б

Рис. 10.2. Изображение касательных линий: а − прямая, б – кривая

10.2. Пример построения касательной к поверхности

Рассмотрим на рис. 10.3 пример построения касательной плоскости к поверхности тора α в точке К.

Через точку К проведем две прямые t и t'. Прямая t_1 касательная к параллели тора m, которая является окружностью, проходящей через точку К. Прямая t' касательна к меридиану ℓ, проходящему через эту точку. Для проведения касательной t' к меридиану ℓ совмещаем его с главным меридианом $\bar{\ell}$ вращением вокруг оси тора. В этом положении к нему через точку $\bar{K}$ проводим касательную t' . Поворот ее в обратном направлении дает искомую линию t' .На рисунке она определена неподвижной точкой, в которой касательная t' пересекает ось тора (1≡1), и заданной точкой К.

Прямые t и t' определяют искомую плоскость τ.

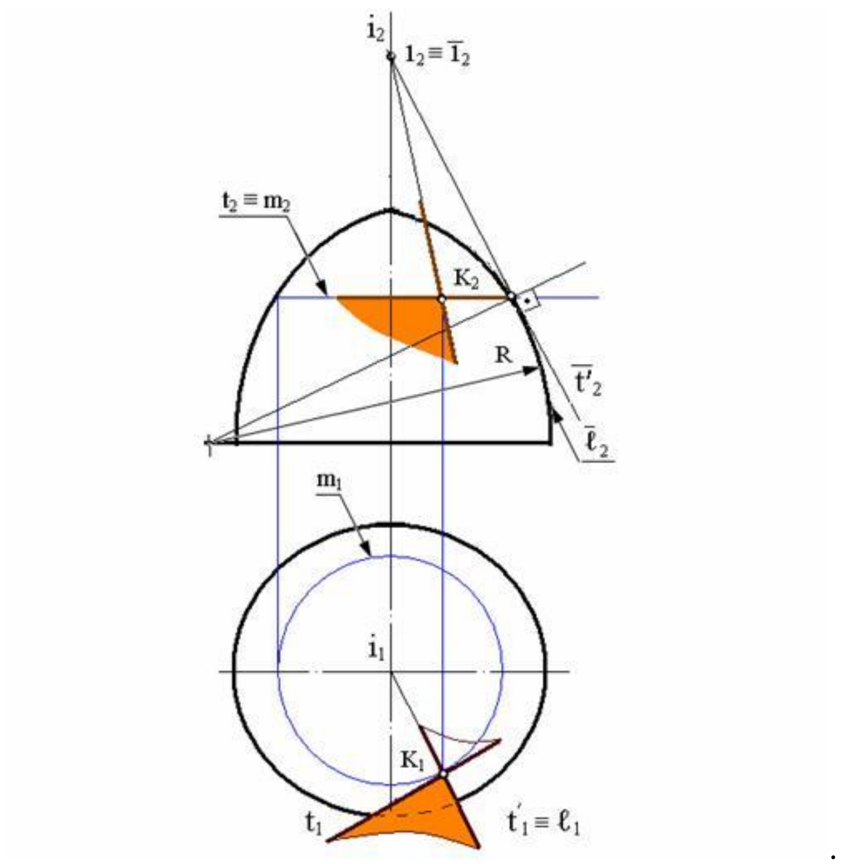


Рис. 10.3. Пример построения касательной плоскости к поверхности тора

Вопросы для самопроверки

1. *Что называется касательной плоскостью к поверхности?*
2. *Что называется нормалью?*
3. *В чём сущность использования касательных?*